Grafická metoda řešení úloh lineárního programování

Úloha výrobního plánování

Podnik vyrábí 2 druhy výrobků V_1 a V_2. Tabulka udává spotřebu surovin S_1 a S_2 v kg potřebných na výrobu 1 kusu výrobku. Zisk z 1 výrobku V_1 je 18 Kč a z 1 výrobku V_2 je 8 Kč. Dále je v tabulce uvedeno množství surovin, kterým podnik disponuje. Stanovte optimální výrobní plán, aby podnik dosáhl maximálního zisku.

Ekonomický model	Výrobky V_1	Výrobky V_2	Disponibilní množství
S_1 [kg/ks]	4	2	2000
S_2 [kg/ks]	4	1	1600
zisk [Kč/ks]	18	8	max

Matematický model:
proměnné: x_1 ... počet výrobků V_1
x_2 ... počet výrobků V_2

Výrobní plán je vyjádřen vektorem $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Vlastní omezení jsou dány nerovnicemi

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 2000, \\ 4x_1 + x_2 &\leq 1600. \end{aligned}$$

Účelová funkce vyjadřující celkový zisk je dána funkcí

$$z(x_1, x_2) = 18x_1 + 8x_2 \longrightarrow \max.$$

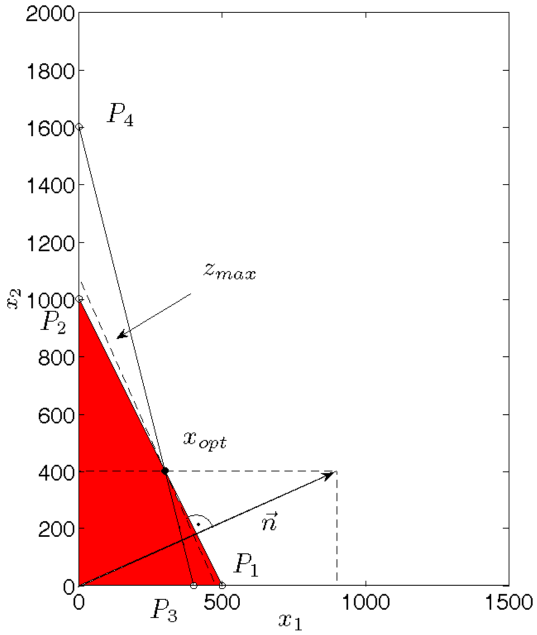
Jedná se o **maximalizační úlohu**.

Pokusíme se vyřešit danou úlohu grafickou metodou. Nejprve je třeba znázornit v rovině množinu přípustných řešení (v modelu vystupují jen 2 proměnné x_1 a x_2). Hledáme tedy všechny takové body $[x_1, x_2]$, které vyhovují nerovnicím

$$4x_1 + 2x_2 \leq 2000,\ 4x_1 + x_2 \leq 1600,\ x_1 \geq 0 \text{ a } x_2 \geq 0.$$

Nejprve zakreslíme v rovině přímky $4x_1 + 2x_2 = 2000$ a $4x_1 + x_2 = 1600$. Jednoduchou metodou, jak tyto přímky zkonstruovat, je najít průsečíky oněch přímek s osami x_1 a x_2. Pro osu x_1 platí, že $x_2 = 0$, analogicky pro osu x_2 je $x_1 = 0$. Průsečík přímky $4x_1 + 2x_2 = 2000$ s osou x_1 potom je dán rovnicí $4x_1 + 2 \cdot 0 = 2000 \Rightarrow x_1 = 500$. Dostáváme průsečík $P_1 = [500, 0]$. Průsečík přímky $4x_1 + 2x_2 = 2000$ s osou x_2 určíme ze vztahu $4 \cdot 0 + 2x_2 = 2000 \Rightarrow x_2 = 1000$, jeho souřadnice jsou $P_2 = [0, 1000]$. Naprosto analogicky se určí průsečíky přímky $4x_1 + x_2 = 1600$ s osami, ty mají souřadnice $P_3 = [400, 0]$ a $P_4 = [0, 1600]$. Každá z přímek rozděluje rovinu na 2 poloroviny. Úkolem je graficky znázornit řešení čtyř nerovnic. Podmínky nezápornosti $x_1 \geq 0$ a $x_2 \geq 0$ omezují naše řešení na I. kvadrant, řešení nerovnice $4x_1 + 2x_2 \leq 2000$ je polorovina s hraniční přímkou $4x_1 + 2x_2 = 2000$. Nyní je třeba rozhodnou, která polorovina odpovídá řešením dané nerovnice. To můžeme zjistit velice snadno. Zvolíme libovolný bod v rovině a zjistíme, zda vyhovuje dané nerovnici, či nikoli. Pokud ano, potom řešením je polorovina obsahující zvolený bod, pokud ne, řešením je druhá polorovina. Nejjednodušší volbou je zjistit, zda bod $[0, 0]$ vyhovuje dané nerovnici, pro první nerovnici dostáváme $4{\cdot}0+2{\cdot}0 \leq 2000 \Rightarrow 0 \leq 2000$, to znamená, že bod $[0, 0]$ je řešením dané nerovnice, tudíž i celá polorovina obsahující tento bod je řešením. Analogicky se zjistí, že bod $[0, 0]$ vyhovuje i druhé nerovnici. Množinu přípustných řešení získáme jako průnik daných dvou polorovin a I. kvadrantu (viz obrázek 1).

Zbývá najít řešení, které maximalizuje účelovou funkci $z = 18x_1 + 8x_2$. Mezi všemi přípustnými řešeními musíme najít takové, pro nějž je hodnota účelové funkce největší. Účelová funkce je funkcí dvou proměnných, tu do roviny zakreslit nelze. Pro hodnotu $z = 0$ dostáváme $0 = 18x_1 + 8x_2$, což je rovnice přímky. Tu je možné v rovině zobrazit. Normálový vektor $\vec{n}$ (vektor, který je kolmý na



Obrázek 1: Grafické řešení úlohy výrobního plánování

danou přímku) je dán koeficienty u x_1 a x_2 v rovnici přímky, tedy $\vec{n} = (18, 8)$. Ve směru tohoto vektoru hodnota účelové funkce nejrychleji narůstá. Znázorníme daný vektor (vhodnější bude jeho násobek, např. vektor $(900, 400)$) do grafu a budeme hledat bod z množiny přípustných řešení, který je nejvíce vzdálen od počátku $[0, 0]$ ve směru daného vektoru (jedná se o maximalizační úlohu). Daný bod x_{opt} je hledaným optimálním řešením úlohy. Tento bod je průsečíkem přímek daných rovnicemi $4x_1 + 2x_2 = 2000$ a $4x_1 + x_2 = 1600$. Pokud vyřešíme danou soustavu rovnic, dostaneme $x_1 = 300$ a $x_2 = 400$. Znamená to, že maximálního zisku podnik dosáhne, pokud bude vyrábět 300 kusů výrobku V_1 a 400 kusů výrobku V_2. Celkový zisk je potom $z = 18 \cdot 300 + 8 \cdot 400 = 8600$ Kč.

Směšovací úloha

Podnik má vytvořit krmnou směs, která by obsahovala alespoň 308 mg vápníku a 214 mg hořčíku. Používají přitom 2 typů krmiv:

- 1 kg krmiva K_1 obsahuje 10 mg Ca a 8 mg Mg a stojí 1500 Kč,
- 1 kg krmiva K_2 obsahuje 8 mg Ca a 1 mg Mg a stojí 240 Kč.

Úkolem je připravit co možná nejlevnější krmnou směs.

Ekonomický model	Krmivo		Požadované množství
	K_1	K_2	
Ca [mg/kg]	10	8	308
Mg [mg/kg]	8	1	214
cena [Kč/kg]	1500	240	min

Matematický model:

proměnné x_1 ... množství krmiva K_1 ve výsledné směsi

x_2 ... množství krmiva K_2 ve výsledné směsi

Výrobní plán je dán vektorem $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Vlastní omezení jsou dány nerovnicemi

$$\begin{aligned} 10x_1 \; + \; 8x_2 &\geq 308, \\ 8x_1 \; + \quad x_2 &\geq 214. \end{aligned}$$

Celková cena směsi je dána účelovou funkcí

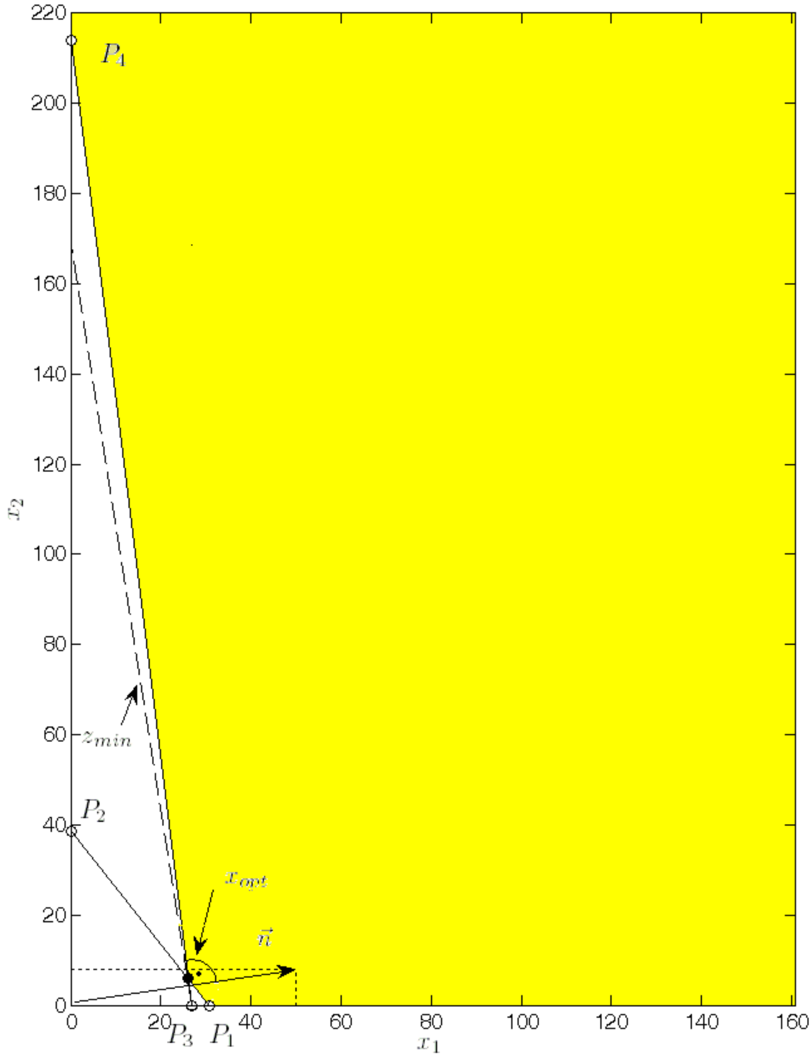
$$z(x_1, x_2) = 1500x_1 + 240x_2 \longrightarrow \min .$$

Jedná se o **minimalizační úlohu**.

V úloze se vyskytují pouze dvě proměnné, je tedy možné pro její řešení použít grafickou metodu. Nejprve zobrazíme množinu přípustných řešení jako průnik polorovin daných nerovnicemi

$$10x_1 + 8x_2 \geq 308, \; 8x_1 + x_2 \geq 214, \; x_1 \geq 0 \text{ a } x_2 \geq 0.$$

Analogicky jako v předcházejícím příkladu určíme průsečíky s osami x_1 a x_2: $P_1 = [\frac{154}{5}, 0]$, $P_2 = [0, \frac{77}{2}]$, $P_3 = [\frac{107}{4}, 0]$ a $P_4 = [0, 214]$. Normálový vektor určíme z koeficientů účelové funkce, $\vec{n} = (1500, 240) \sim (50, 8)$. Protože se jedná o minimalizační úlohu, hledáme mezi všemi přípustnými řešeními to, které minimalizuje hodnotu účelové funkce. Budeme hledat řešení, které je ve směru normálového vektoru nejblíže počátku $[0, 0]$. Celkové řešení je znázorněno na obrázku 2. Optimální řešení je průsečíkem přímek $10x_1 + 8x_2 = 308$, $8x_1 + x_2 = 214$. Řešením dané soustavy rovnic dostaneme $x_1 = 26$ a $x_2 = 6$. Nejlevnější krmná směs bude vyrobena z 26 kg krmiva K_1 a 6 kg krmiva K_2. Její cena bude $z = 1500 \cdot 26 + 240 \cdot 6 = 40440$ Kč.



Obrázek 2: Grafické řešení směšovací úlohy