

## Kombinatorika

- nauka o skupinách: řeší tvorbu skupin a určování počtu skupin dané vlastnosti

$n$  ... počet prvků základní množiny

$k$  ... počet prvků tvořících skupiny

pořadí ... na pořadí záleží x nezáleží

opakování ... bez opakování x s opakováním

- výpočetní prostředky kombinatoriky:

~ faktoriál: pro  $n \in \mathbb{N}$ :  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  a  $0! = 1$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

př.:  $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

~ kombinační číslo: pro  $n, k \in \mathbb{N}$  a  $k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{a} \quad \binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1$$

vlastnosti:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  a  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

př.:  $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

- **permutace** – skupiny, ve kterých záleží na pořadí  $\rightarrow$  uspořádané výběry

~ bez opakování:  $P(n) = n!$ ;  $k = n$

př.: V osudí je 6 lístků s čísly 1, 2, ..., 6. Kolika různými způsoby je lze postupně vytáhnout, když se lístky do osudí nevrací a záleží na pořadí?

$$P(6) = 6! = 720$$

~ s opakováním:  $P'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(k) = \frac{k!}{k_1!k_2! \dots k_n!}$ , kde  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$  a  $k > n$

př.: Kolik šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 1, 1, 2, 2, 3?

$$P'_{3,2,1}(6) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{12} = 60$$

- **variace** – skupiny, ve kterých záleží na pořadí  $\rightarrow$  uspořádané výběry

~ bez opakování:  $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ ;  $k \leq n$  (pro  $k = n$  se jedná

o permutace  $n$ -tého řádu bez opakování)

př.: Kolik různých převodů lze vytvořit ze 4 ozubených kol o různém počtu zubů?

$$V_2(4) = 4 \cdot 3 = 12$$

~ s opakováním:  $V'_k(n) = n^k$ ;  $k \dots$  lib.

př.: Kolika způsoby lze vyplnit sloupec Sazky (13 zápasů, typy 0, 1, 2) ?

$$V'_{13}(3) = 3^{13} = 1\,594\,393$$

• **kombinace** – skupiny, ve kterých nezáleží na pořadí → neuspořádané výběry

~ bez opakování:  $C_k(n) = \binom{n}{k}$ ;  $k \leq n$

př.: 8 závodníků má sehrát turnaj systémem každý s každým, kolik zápasů se odehraje ?

$$C_2(8) = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

~ s opakováním:  $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$ ;  $k \dots$  lib.

př.: V prodejně mají výběr 5 různých pohlednic. Kolika způsoby je možné si koupit 8 pohlednic ?

$$C'_8(5) = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$