

Modely stacionárních časových řad

Statistika II

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FVL UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email: Jiri.Neubauer@unob.cz

Proces bílého šumu

Proces $\{\epsilon_t\}$ nazveme **bílým šumem** s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2 a píšeme

$$\{\epsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

právě když $\{\epsilon_t\}$ má střední hodnotu 0 a pro kovarianční funkci platí

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0. \end{cases}$$

Jestliže náhodné veličiny ϵ_t jsou nezávislé se stejným rozdělením se střední hodnotou 0 a rozptylem σ^2 , pak budeme psát

$$\{\epsilon_t\} \sim i.i.d.(0, \sigma^2).$$

Lineární proces

Nechť $\{\epsilon_t\}$ je bílý šum s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2 . Nechť ψ_0, ψ_1, \dots , jsou taková čísla, že $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Proces

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j},$$

se nazývá **lineární proces**¹.

¹Podmínka $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ bývá někdy nahrazena silnější podmínkou $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Autoregresní proces řádu 1 – AR(1)

Proces je dán rovnicí

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

kde ϕ_1 je reálné číslo a $\{\epsilon_t\}$ je bílý šum. Pomocí operátoru zpětného posunutí L , pro který platí $LY_t = Y_{t-1}$, $L^2 Y_t = Y_{t-2}$ a obecně $L^s Y_t = Y_{t-s}$, můžeme model zapsat ve tvaru

$$(1 - \phi_1 L) Y_t = \epsilon_t.$$

Pro proces AR(1) postupným dosazováním dostaneme

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t = \phi_1(\phi_1 Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t = \dots = \\ &= \epsilon_t + \phi_1 \epsilon_{t-1} + \phi_1^2 \epsilon_{t-2} + \dots + \phi_1^k \epsilon_{t-k} + \phi_1^{k+1} Y_{t-k-1}. \end{aligned}$$

Je možné ukázat, že pro $|\phi_1| < 1$, $k \rightarrow \infty$, $E(Y_t^2) < \infty$ platí

$$Y_t = \epsilon_t + \phi_1 \epsilon_{t-1} + \phi_1^2 \epsilon_{t-2} + \phi_1^3 \epsilon_{t-3} \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \epsilon_{t-j}. \quad (1)$$

Na proces (1) se lze dívat jako lineární proces, kde $\psi_j = \phi_1^j$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |\phi_1|^j = \frac{1}{1 - |\phi_1|} < \infty.$$

AR(1) proces s $|\phi_1| < 1$ se nazývá *kauzální*, Y_t lze vyjádřit ve formě lineárního procesu (lineární kombinace současné a minulých hodnot ϵ_t). Tento proces je stacionární.

Proces AR(1)

Autokorelační funkce AR(1) procesu je rovna

$$\rho_k = \phi_1^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

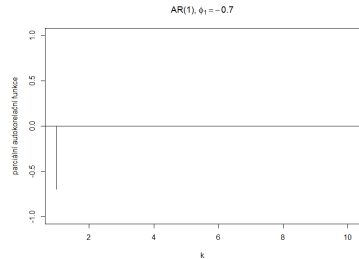
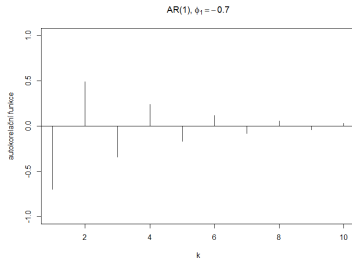
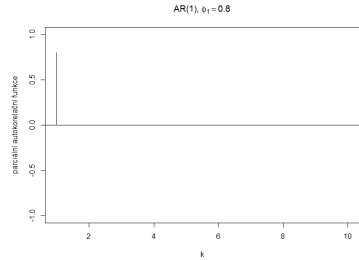
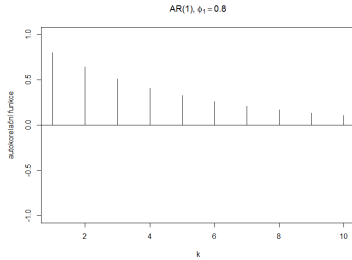
Jestliže $\phi_1 > 0$, hodnoty ACF klesají exponenciálně k nule, jestliže $\phi_1 < 0$, hodnoty klesají k nule oscilačně. Pokles hodnot ACF je pomalý, blíží-li se ϕ k hodnotám $+1$ nebo -1 .

Parciální autokorelační funkce AR(1) procesu je rovna

$$\rho_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & k = 1, \\ 0 & k \geq 2. \end{cases}$$

PACF má **identifikační bod** $k_0 = 1$.

Proces AR(1)



Proces AR(2)

Proces je dán rovnicí

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t,$$

kde ϕ_1, ϕ_2 jsou reálné čísla a $\{\epsilon_t\}$ je bílý šum. Pomocí operátoru zpětného posunutí můžeme model zapsat ve tvaru

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)Y_t = \epsilon_t.$$

Charakteristický polynom tohoto procesu je

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2.$$

Lze ukázat, že pokud kořeny tohoto polynomu leží mimo jednotkovou kružnici v rovině komplexních čísel, je tento proces **stacionární**. Leží-li vně jednotkové kružnice, proces je kauzální.

Proces AR(2)

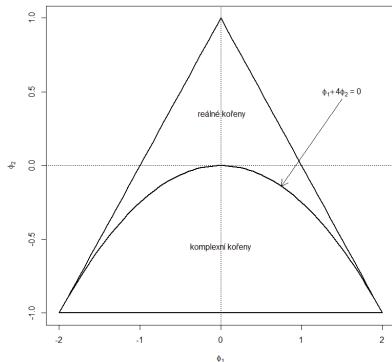
Kořeny charakteristického polynomu jsou

$$z_{1,2} = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}.$$

Tyto kořeny jsou v absolutní hodnotě větší než 1 právě tehdy, jsou-li splněny následující tři podmínky

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1.$$

Proces AR(2)



Obrázek: Oblast kauzality (stacionarity) parametrů AR(2) modelu

Proces AR(2)

Využijeme-li Yule-Walkerovy rovnice pro AR(2) proces, dostaneme

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

Pro $k = 1$ a $\rho_0 = 1$ dostáváme $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$, tedy

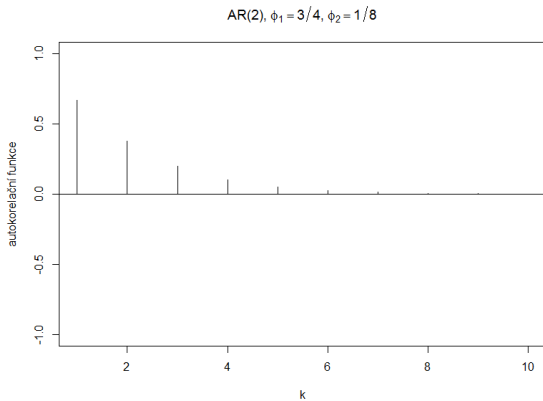
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}.$$

Pro $k = 2$ máme $\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0$, tedy

$$\rho_2 = \frac{\phi_2(1 - \phi_2) + \phi_1^2}{1 - \phi_2}.$$

Další hodnoty lze dopočítat pomocí rekurentní formule. PACF má **identifikační bod** $k_0 = 2$ – pro $k > 2$ je PACF nulová.

Proces AR(2)



Autoregresní model řádu p – $AR(p)$

Model je dán rovnicí

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t,$$

pomocí operátoru zpětného posunutí

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \epsilon_t, \quad \text{tj.} \quad \phi_p(L) Y_t = \epsilon_t,$$

kde $\phi_p(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$. Za podmínky stacionarity lze proces $AR(p)$ vyjádřit ve tvaru lineárního procesu. Tato podmínka je splněna, leží-li kořeny charakteristického polynomu $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ vně jednotkového kruhu.

Model AR(p)

Hodnoty ACF tvoří kombinace exponenciálně klesajících pohybů (v případě reálných kořenů polynomiální rovnice) a exponenciálně klesajících sinusoidních pohybů (v případě komplexních kořenů).

Hodnoty PACF pro zpoždění $k = 1, 2, \dots, p$ jsou různé od nuly, pro další hodnoty jsou potom rovny nule.

Proces klouzavých průměrů řádu 1 – MA(1)

Model je dán vztahem

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}, \quad \text{neboli} \quad Y_t = (1 + \theta_1 L) \epsilon_t,$$

kde L je operátor zpětného posunutí ($L\epsilon_t = \epsilon_{t-1}$). Tento model, stejně jako všechny MA modely, je **stacionární**.

Je-li možné MA proces vyjádřit ve formě konvergující AR(∞), tj.

$(1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \dots) Y_t = \epsilon_t$, kde $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, potom se označuje jako **invertibilní**.

Proces MA(1)

Hodnoty ACF procesu MA(1) jsou dány vztahem

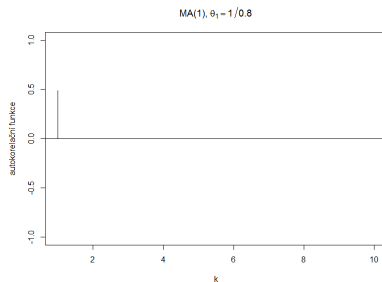
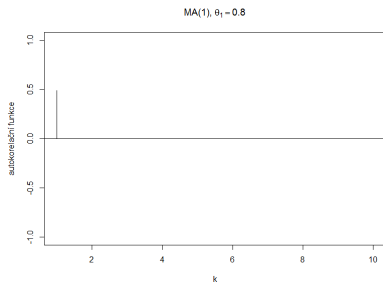
$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & k = 1, \\ 0 & k > 1. \end{cases}$$

ACF má identifikační bod $k = 1$.

Pozn.: Stejnou ACF mají vždy dva MA(1) procesy, s parametrem θ_1 a $1/\theta_1$.
Je-li $|\theta_1| < 1$, potom $|1/\theta_1| > 1$ a tento proces není invertibilní.

Hodnoty PACF pro $\theta_1 < 0$ přibližují se exponenciálně k nule. Jestliže $\theta_1 > 0$, oscilují s klesající amplitudou.

Proces MA(1)



Proces klouzavých průměrů řádu q – MA(q)

Model je dán vztahem

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \quad \text{neboli} \quad Y_t = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) \epsilon_t.$$

Proces je invertibilní, leží-li kořeny charakteristického polynomu

$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ vně jednotkového kruhu.

ACF má tvar

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q, \\ 0 & k > q. \end{cases}$$

ACF má identifikační bod $k = q$. Hodnoty PACF tvoří kombinace exponenciálně klesajících pohybů (v případě reálných kořenů polynomiální rovnice) a exponenciálně klesajících sinusoidních pohybů (v případě komplexních kořenů).

Smíšený proces ARMA(1,1)

Nejjednodušší smíšený proces má tvar

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}, \quad \text{tj.} \quad (1 - \phi_1 L) Y_t = (1 + \theta_1 L) \epsilon_t.$$

ACF je podobná ACF procesu AR(1), je charakteristická exponenciálně klesajícími (příp. oscilujícími) hodnotami. Exponenciální pokles začíná od hodnoty ρ_1 , na rozdíl od procesu AR(1), kde začínal již od hodnoty $\rho_0 = 1$. Tvar PACF je podobný jako u procesu MA(1). Po počáteční hodnotě $\phi_{11} = \rho_1$ je tato funkce charakteristická exponenciálním (resp. oscilujícím) poklesem.

Smíšený proces ARMA(p, q)

Rovnice modelu je

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) Y_t = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) \epsilon_t.$$

ACF je podobná ACF procesu AR(p), je charakteristická exponenciálně klesajícími (příp. oscilujícími) hodnotami. Tento tvar však bude následovat až po prvních $q - p$ hodnotách (pro $q > p$). Hodnoty $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{q-p}$ tento tvar mít nebudou.

Pro $k > p - q$ a $p > q$ se PACF bude chovat stejně jako procesu MA(q). Pro $k \leq p - q$ je však tento tvar odlišný.

Smíšený proces ARMA(p, q)

ARMA proces se nazývá **kauzální**, jestliže existuje taková reálná posloupnost

$\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, že platí

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \text{ neboli } Y_t = \psi(L)\epsilon_t, t \in \mathbb{Z},$$

kde

$$\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$$

ARMA proces se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje taková reálná posloupnost

$\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, že platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} = \epsilon_t, \text{ neboli } \pi(L)Y_t = \epsilon_t, t \in \mathbb{Z},$$

kde

$$\pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots$$

Specifikace modelu – ARMA(p, q)

- výběr hodnot pro p , q pro danou časovou řadu
- odhad parametrů zvoleného ARMA(p , q) modelu

Specifikace modelu – ARMA(p,q)

Odhad autokorelační funkce (ACF) má tvar

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y}_t)(Y_{t-k} - \bar{Y}_t)}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

kde

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t,$$

kde n je počet hodnot (délka) časové řady.

Pro konstrukci intervalu spolehlivosti odhadu $\hat{\rho}_k$ použijeme tzv. **Bartlettovu aproximaci**. Je-li $\rho_k = 0$ pro $k > k_0$, pak

$$\sigma(\hat{\rho}_k) = \sqrt{D(\hat{\rho}_k)} \sim \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} \hat{\rho}_j^2 \right)}, \quad k > k_0.$$

Máme-li rozhodnout, zda $\rho_k = 0$, porovnáme hodnotu $|\hat{\rho}_k|$ obvykle s číslem $2\sigma(\hat{\rho}_k)$.

Specifikace modelu – ARMA(p,q)

Odhad parciální autokorelační funkce (PACF) je dán

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{11} &= \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_{kk} &= \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\rho}_{k-1,j} \hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\rho}_{k-1,j} \hat{\rho}_j}, \\ \hat{\rho}_{kj} &= \hat{\rho}_{k-1,j} - \hat{\rho}_{kk} \hat{\rho}_{k-1,k-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.\end{aligned}$$

Nulovost hodnot PACF lze testovat na základě tzv. **Quenouilleovy aproximace**. Je-li $\hat{\rho}_{kk} = 0$ pro $k > k_0$, pak

$$\sigma(\hat{\rho}_{kk}) \sim \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad k > k_0.$$

Pro vlastní test použijeme dvojnásobek této směrodatné odchylky.

Specifikace modelu – ARMA(p, q)

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ACF	neexistuje k_0 ρ_k ve tvaru U	$k_0 = q$	neexistuje k_0 , ρ_k ve tvaru U po prvních $q - p$ hodnotách
PACF	$k_0 = p$	neexistuje k_0 ρ_{kk} omezená křivkou U	neexistuje k_0 ρ_{kk} omezená křivkou U po prvních $p - q$ hodnotách

Tabulka: Tvar autokorelační a parciální autokorelační funkce

Specifikace modelu – ARMA(p,q)

Některá kritéria pro volbu modelu (hledá se model s nejmenší hodnotou kritéria)

- **Akaikeho kritérium AIC:**

$$AIC = \ln \hat{\sigma}_\epsilon^2 + 2M/n,$$

kde $M = p + q$, $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ je reziduální rozptyl a n je počet pozorování (počet reziduí).

- **Schwartzovo kritérium SC:**

$$SC = \ln \hat{\sigma}_\epsilon^2 + \frac{2Mn}{1 - (M + 1)/n}.$$

- **Hannanovo-Quinnova kritérium HQ:**

$$HQ = \ln \hat{\sigma}_\epsilon^2 + 2M(\ln(\ln n))/n.$$

Odhady parametrů modelu – ARMA(p,q)

- metoda momentů
- metoda nejmenších čtverců
- metoda maximální věrohodnosti

Ověření vhodnosti modelu

- analýza reziduí
 - graf reziduí, graf standardizovaných reziduí
 - histogram reziduí
 - Q-Q plot
 - autokorelace reziduí – ACF, PACF, Ljung-Boxův test (portmanteau test)
- přefitování (overfitting), nadbytečnost parametrů

Konstrukce předpovědi

Na základě historie časové řady až to času t , tedy Y_1, Y_2, \dots, Y_t , bude chtít předpovědět (predikovat) hodnotu Y_{t+h} , tedy hodnotu v čase $t + h$. Označme tuto předpověď $\hat{Y}_t(h)$. Lze ukázat, že předpověď s nejmenší střední čtvercovou chybou (minimum mean square forecast – MSE)

$$E[Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h)]^2$$

má tvar

$$\hat{Y}_t(h) = E(Y_{t+h} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t).$$

Konstrukce předpovědi – AR(1)

Nejprve ukážeme konstrukci predikcí pro AR(1) proces. Mějme proces s nulovou střední hodnotou

$$Y_t - \mu = \phi(Y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t.$$

Jednokrokovou předpověď získáme dosazením $t + 1$ za t

$$Y_{t+1} - \mu = \phi(Y_t - \mu) + \epsilon_{t+1}.$$

Při daných hodnotách Y_1, Y_2, \dots, Y_t spočteme podmíněnou střední hodnotu na obou stranách předchozí rovnice

$$\widehat{Y}_t(1) - \mu = \phi[E(Y_t | Y_1, Y_2, \dots, Y_t) - \mu] + E(\epsilon_{t+1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t).$$

Z vlastností podmíněné střední hodnoty plyne

$$E(Y_t | Y_1, Y_2, \dots, Y_t) = Y_t,$$

protože ϵ_{t+1} je nezávislé na Y_1, Y_2, \dots, Y_t je

$$E(\epsilon_{t+1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t) = E(\epsilon_{t+1}) = 0.$$

$$\widehat{Y}_t(1) = \mu + \phi(Y_t - \mu)$$

Konstrukce předpovědi – AR(1)

Předpověď pro čas $t + h$ bychom podobným postupem dostali

$$\hat{Y}_t(h) = \mu + \phi[\hat{Y}_t(h-1) - \mu], \text{ pro } h \geq 1,$$

neboť $E(Y_{t+h-1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t) = \hat{Y}_t(h-1)$ a pro $k \geq 1$ je ϵ_{t+k} nezávislé na Y_1, Y_2, \dots, Y_t .

Předpověď $\hat{Y}_t(2)$ je potom rovna

$$\hat{Y}_t(2) = \mu + \phi[\hat{Y}_t(1) - \mu],$$

podobně se získají další předpovědi. Pro předpověď $\hat{Y}_t(h)$ tedy platí

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t(h) &= \phi[\hat{Y}_t(h-1) - \mu] + \mu = \\ &= \phi\{\phi[\hat{Y}_t(h-2) - \mu]\} + \mu = \\ &\vdots \\ &= \phi^{h-1}[\hat{Y}_t(1) - \mu] + \mu \end{aligned}$$

nebo

$$\hat{Y}_t(h) = \mu + \phi^h(Y_t - \mu).$$

Konstrukce předpovědi – AR(1)

Mějme chybu jednokrokové předpovědi $\epsilon_t(1)$, pro ni platí

$$\begin{aligned}\epsilon_t(1) &= Y_{t+1} - \hat{Y}_t(1) = \\ &= [\phi(Y_t - \mu) + \mu + \epsilon_{t+1}] - [\phi(Y_t - \mu) + \mu] = \\ &= \epsilon_{t+1}\end{aligned}$$

Chyba jednokrokové předpovědi má nulovou střední hodnotu, je nezávislá na historii procesu, její rozptyl je

$$D[\epsilon_t(1)] = \sigma_\epsilon^2.$$

Konstrukce předpovědi – AR(1)

Přepíšeme nyní AR(1) proces do tvaru MA(∞)

$$Y_t = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \phi^3\epsilon_{t-3} + \dots$$

S využitím (2) tuto rovnici upravíme

$$\begin{aligned} \epsilon_t(h) &= Y_{t+h} - \mu - \phi^h(Y_t - \mu) = \\ &= \epsilon_{t+h} + \phi\epsilon_{t+h-1} + \dots + \phi^{h-1}\epsilon_{t+1} + \phi^h\epsilon_t + \dots - \phi^h(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \dots) = \\ &= \epsilon_{t+h} + \phi\epsilon_{t+h-1} + \dots + \phi^{h-1}\epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Uvedený vztah lze přepsat

$$\epsilon_t(h) = \epsilon_{t+h} + \psi_1\epsilon_{t+h-1} + \psi_2\epsilon_{t+h-2} + \dots + \psi_{h-1}\epsilon_{t+1},$$

Střední hodnota je $E[\epsilon_t(h)] = 0$, odhad je nestranný, rozptyl je roven

$$D[\epsilon_t(h)] = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \psi_1 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2 \right).$$

Interval spolehlivosti pro h -krokovou předpověď je

$$\left(\hat{Y}_t(h) - 2\sigma_\epsilon \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2}, \hat{Y}_t(h) + 2\sigma_\epsilon \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2} \right).$$