

Primární a duální úloha lineárního programování

Podnik vyrábí 3 výrobky V_1 , V_2 a V_3 ze surovin S_1 , S_2 a S_3 , kterých má k dispozici po řadě 180, 210 a 120 kg. Na výrobu 1 kusu výrobku V_1 je potřeba 1 kg suroviny S_1 , 2 kg suroviny S_2 a 0,5 kg suroviny S_3 . Na výrobu 1 kusu výrobku V_2 je potřeba 1 kg suroviny S_1 , 2 kg suroviny S_2 a 2 kg suroviny S_3 . Na výrobu 1 kusu výrobku V_3 jsou potřeba 2 kg suroviny S_1 a 3 kg suroviny S_2 . Výrobek V_1 se vyrábí se ziskem 10 Kč, V_2 se ziskem 15 Kč a V_3 se ziskem 20 Kč. Určete optimální výrobní plán, při kterém podnik dosáhne maximálního zisku.

Matematický model – primární úloha

x_1 ... počet kusů výrobku V_1

x_2 ... počet kusů výrobku V_2

x_3 ... počet kusů výrobku V_3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 180 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 210 \\ 0,5x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x'_1 &= 180 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x'_2 &= 210 \\ 0,5x_1 + 2x_2 + x'_3 &= 120 \\ z - 10x_1 - 15x_2 - 20x_3 &= 0 \rightarrow \max \end{aligned}$$

báze	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x'_1	1	1	2	1	0	0	180	90
x'_2	2	2	3	0	1	0	210	70
x'_3	$\frac{1}{2}$	2	0	0	0	1	120	–
z	-10	-15	-20	0	0	0	0	max
x'_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	40	–
x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	70	105
x'_3	$\frac{1}{2}$	2	0	0	0	1	120	60
z	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{20}{3}$	0	1400	max
x'_1	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	60	
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	30	
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	60	
z	$\frac{15}{4}$	0	0	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{6}$	1500	max
	u_1	u_2	u_3	u'_1	u'_2	u'_3		

Optimální řešení primární úlohy je $\vec{x} = (0, 60, 30, 60, 0, 0)$ s hodnotou účelové funkce $z = 1500$. Maximálního zisku se dosáhne, pokud se bude vyrábět 60 kusů výrobku V_2 a 30 kusů výrobku V_3 , přičemž zůstane nevyužito 60 kg suroviny S_1 .

Matematický model – duální úloha

u_1 ... cena 1 kg suroviny S_1

u_2 ... cena 1 kg suroviny S_2

u_3 ... cena 1 kg suroviny S_3

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + 0,5u_3 &\geq 10 \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 &\geq 15 \\ 2u_1 + 3u_2 &\geq 20 \\ f = 180u_1 + 210u_2 + 120u_3 &\rightarrow \min \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + 0,5u_3 - u'_1 &= 10 \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 - u'_2 &= 15 \\ 2u_1 + 3u_2 - u'_3 &= 20 \\ f - 180u_1 - 210u_2 - 120u_3 &= 0 \rightarrow \min \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + 0,5u_3 - u'_1 + u''_1 &= 10 \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 - u'_2 + u''_2 &= 15 \\ 2u_1 + 3u_2 - u'_3 + u''_3 &= 20 \\ f - 180u_1 - 210u_2 - 120u_3 &= 0 \rightarrow \min \\ (f'' - u''_1 - u''_2 - u''_3) &= 0 \rightarrow \min \\ f'' + 4u_1 + 7u_2 + 2,5u_3 - u'_1 - u'_2 - u'_3 &= 45 \rightarrow \min \end{aligned}$$

báze	u_1	u_2	u_3	u'_1	u'_2	u'_3	u''_1	u''_2	u''_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
u'_1	1	2	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	1	0	0	10	5
u'_2	1	2	2	0	-1	0	0	1	0	15	$\frac{15}{2}$
u'_3	2	3	0	0	0	-1	0	0	1	20	$\frac{20}{3}$
f	-180	-210	-120	0	0	0	0	0	0	0	min
f'	4	7	$\frac{5}{2}$	-1	-1	-1	0	0	0	45	min
u_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5	-
u''_2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	-1	0	-1	1	0	5	5
u''_3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	1	5	$\frac{10}{3}$
f	-75	0	$-\frac{135}{2}$	-105	0	0	105	0	0	1050	min
f'	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	-1	-1	$-\frac{7}{2}$	0	0	10	min
u_2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$	-
u''_2	$-\frac{1}{3}$	0	2	0	-1	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$
u'_1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	-
f	-40	0	-120	0	0	-70	0	0	70	1400	min
f'	$-\frac{1}{3}$	0	2	0	-1	$\frac{2}{3}$	-1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	min
u_2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$	
u_3	$-\frac{1}{6}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	
u'_1	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$	
f	-60	0	0	0	-60	-30	0	60	30	1500	min
f'	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	min
báze	u_1	u_2	u_3	u'_1	u'_2	u'_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$			
u_2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$				
u_3	$-\frac{1}{6}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$				
u'_1	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$				
f	-60	0	0	0	-60	-30	1500	min			
	x'_1	x'_2	x'_3	x_1	x_2	x_3					

Optimální řešení duální úlohy je $\vec{u} = (0, \frac{20}{3}, \frac{5}{6}, \frac{15}{4}, 0, 0)$ s hodnotou účelové funkce $z = 1500$. 1 kg suroviny S_2 se bude podílet na zisku hodnotou $\frac{20}{3}$ Kč, 1 kg suroviny S_3 se bude podílet na zisku hodnotou $\frac{5}{6}$ Kč. $\frac{15}{4}$ Kč je suma, o kterou přesáhne cena surovin S_1 , S_2 a S_3 sumu, za kterou se prodá výrobek V_1 (Tento výrobek se nevyrábí - viz výsledek primární úlohy).