Kontingenční tabulky, korelační koeficienty

Statistika II

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FVL UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

χ^2-test nezávislosti

Budeme předpokládat, že X a Y jsou kvalitativní náhodné veličiny, obor hodnot X obsahuje r hodnot (kategorií, které budou kódovány čísly $1, 2, \ldots, r$) a podobně obor hodnot Y obsahuje s hodnot (kategorií, které budou kódovány čísly $1, 2, \ldots, s$). Sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X a Y je popsána vztahem

$$p(j,k) = P(X = j,\ Y = k),\ j = 1, 2, \ldots r,\ k = 1, 2, \ldots, s.$$

Odpovídající marginální pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je dána vztahem

$$p_X(j) = P(X = j) = \sum_{k=1}^{s} p(j,k),\ j = 1, 2, \ldots, r$$

a pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y vztahem

$$p_Y(k) = P(Y = k) = \sum_{j=1}^{r} p(j,k),\ k = 1, 2, \ldots, s.$$

Hodnoty pravděpodobnostní funkce lze uspořádat do tabulky

χ^2-test nezávislosti

$X \backslash Y$	1	$\dots$	k	$\dots$	s	$\sum$
1	$p(1,1)$	$\dots$	$p(1,k)$	$\dots$	$p(1,s)$	$p_X(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$p(j,1)$	$\dots$	$p(j,k)$	$\dots$	$p(j,s)$	$p_X(j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$p(r,1)$	$\dots$	$p(r,k)$	$\dots$	$p(r,s)$	$p_X(r)$
$\sum$	$p_Y(1)$	$\dots$	$p_Y(k)$	$\dots$	$p_Y(s)$	1

$X \backslash Y$	1	$\dots$	k	$\dots$	s	$\sum$
1	n_{11}	$\dots$	n_{1k}	$\dots$	n_{1s}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	n_{j1}	$\dots$	n_{jk}	$\dots$	n_{js}	$n_{j.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	n_{r1}	$\dots$	n_{rk}	$\dots$	n_{rs}	$n_{r.}$
$\sum$	$n_{.1}$	$\dots$	$n_{.k}$	$\dots$	$n_{.s}$	n

Tabulka: Tabulka pravděpodobnostní funkce $p(j,k)$ a kontingenční tabulka pro hodnoty náhodného výběru z diskrétního rozdělení

χ^2-test nezávislosti

Pro nezávislé znaky X a Y platí

$$p(j,k) = p_X(j) \cdot p_Y(k).$$

Odhad $p_X(j)$ lze určit jako $\widehat{p}_X(j) = \frac{n_{j.}}{n}$, podobně odhad $p_Y(k)$ je dán $\widehat{p}_Y(k) = \frac{n_{.k}}{n}$, potom odhad $p(j,k)$ je roven $\widehat{p}(j,k) = \widehat{p}_X(j) \cdot \widehat{p}_Y(k)$. Četnosti, které lze očekávat v kontingenční tabulce při nezávislosti proměnných X a Y, jsou tvaru

$$o_{jk} = n \cdot \widehat{p}(j,k) = n \cdot \widehat{p}_X(j) \cdot \widehat{p}_Y(k) = n \cdot \frac{n_{j.}}{n} \cdot \frac{n_{.k}}{n} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n} \qquad (1)$$

a nazveme je **očekávané četnosti**. Jsou-li veličiny X a Y nezávislé, lze předpokládat, že empirické četnosti n_{jk} budou blízké očekávaným četnostem o_{jk}.

χ^2-test nezávislosti

K testování nezávislosti náhodných veličin Xa Y lze použít statistiku

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{(n_{jk} - o_{jk})^2}{o_{jk}}, \tag{2}$$

která má asymptoticky χ^2 rozdělení s $\nu = (r-1)(s-1)$ stupni volnosti. Hypotézu nezávislosti proměnných X a Y pak zamítáme na hladině významnosti α, když $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, kde $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$ je $100(1-\alpha)\%$ kvantil Pearsonova χ^2 rozdělení s ν stupni volnosti. Test lze použít při dostatečném obsazení všech buněk tabulky, tj. pokud všechny očekávané četnosti jsou dosti velké, obvykle se předpokládá, že $o_{jk} \geq 5$. Při nesplnění této podmínky se doporučuje spojování „sousedních“ obměn u jedné nebo druhé veličiny (sloučíme celé řádky nebo sloupce a při opakovaném testu s nimi zacházíme jako s jedinou třídou).

Příklad

Při sociologickém průzkumu odpovídalo 100 náhodně vybraných osob na určitou otázku. Výsledky jsou v následující tabulce. Rozhodněte, zda odpověď závisí na pohlaví dotazovaných.

Pohlaví	Rozhodně ano	Spíše ano	Nevím	Spíše ne	Rozhodně ne	Celkem
Muž	2	20	10	15	8	55
Žena	4	15	15	8	3	45
Celkem	6	35	25	23	11	100

	k					
j	1	2	3	4	5	celkem
1	3,30	19,25	13,75	12,65	6,05	55,00
2	2,70	15,75	11,25	10,35	4,95	45,00
celkem	6,00	35,00	25,00	23,00	11,00	100,00

Tabulka: Tabulka teoretických četností

Příklad

Alespoň 80 % těchto teoretických četností by mělo být větší než 5, což v našem případě není splněné (3 hodnoty z 10 jsou menší než 5). Proto je vhodné provést sloučení některých sloupců či řádků, slučování je však třeba provádět „rozumně“, zejména s ohledem na věcný význam spojovaných obměn. Pokud slučování není možné (např. u nás by to byly muži a ženy, nebo rozhodně ano a rozhodně ne), potom v krajním případě ponecháme původní sloupcové i řádkové obměny, ale s vědomím, že takovýto „prohřešek“ snižuje sílu testu. My sloučíme první dva sloupce v původní kontingenční tabulce, které odpovídají pozitivní reakci na danou otázku, a přepočteme příslušné teoretické četnosti.

Příklad

Pohlaví	Pozitivní reakce	Nevím	Spíše ne	Rozhodně ne	Celkem
Muž	22	10	15	8	55
Žena	19	15	8	3	45
Celkem	41	25	23	11	100

	k				
j	1	2	3	4	celkem
1	22,55	13,75	12,65	6,05	55,00
2	18,45	11,25	10,35	4,95	45,00
celkem	41,00	25,00	23,00	11,00	100,00

Tabulka: Tabulka teoretických četností

Příklad

	k				
j	1	2	3	4	celkem
1	0,013	1,023	0,437	0,629	2,101
2	0,016	1,250	0,534	0,768	2,568
celkem	0,03	2,273	0,97	1,397	4,669

Tabulka: Výpočet testové statistiky

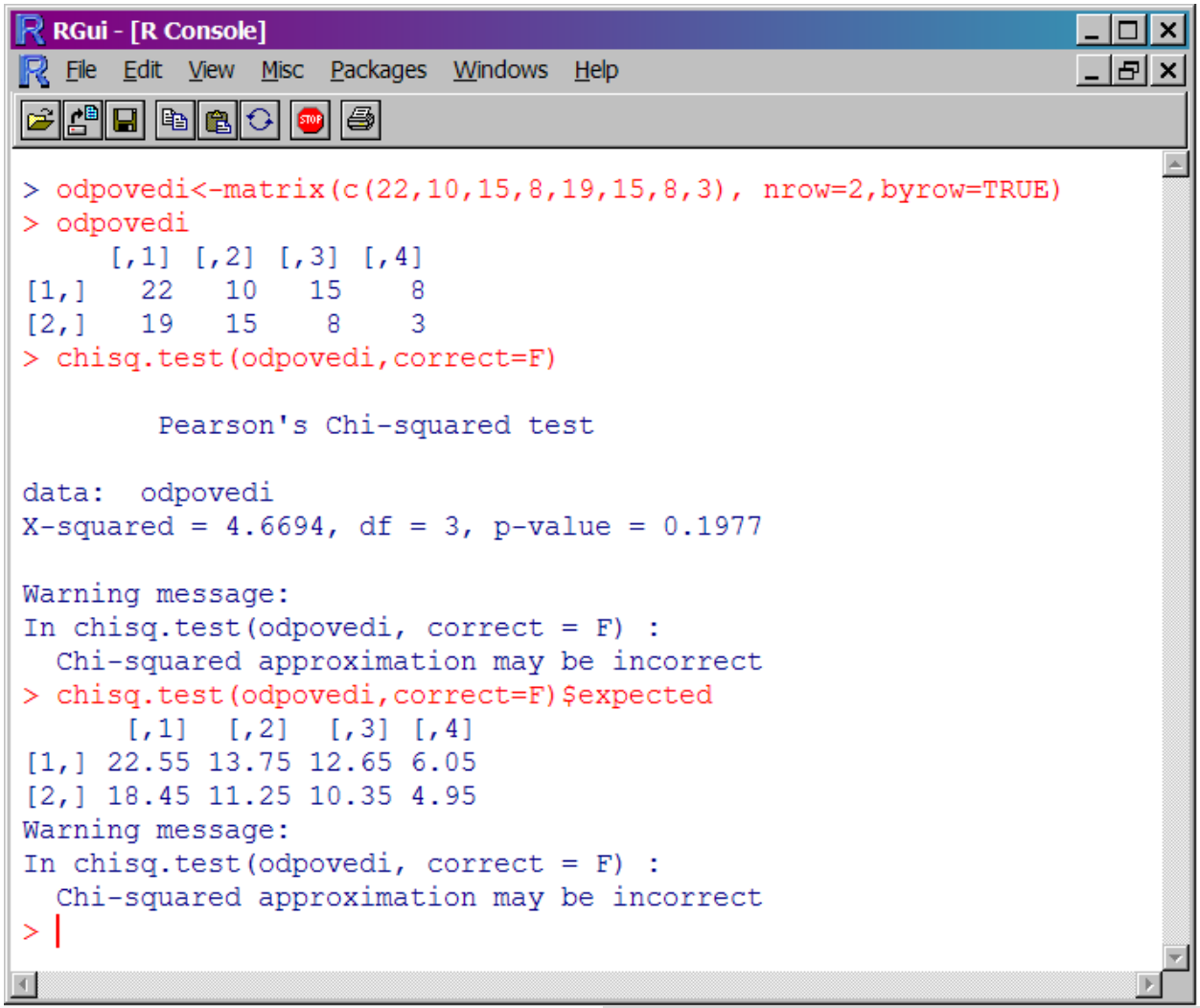
Hodnota testové statistiky je tedy

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \frac{(n_{jk} - o_{jk})^2}{o_{jk}} = 4{,}66,$$

hladinu významnosti použijeme $\alpha = 0{,}05$, stupně volnosti jsou $\nu = (r-1)(s-1) = 3 \cdot 1 = 3$. Kritický obor je tvořen hodnotami většími než $\chi^2_{1-\alpha}(3) = 7{,}815$. Hodnota testového kritéria nepatří do kritického oboru, tedy se s 95% pravděpodobností neprokázalo, že odpověď na danou otázku závisí na pohlaví.

χ^2-test nezávislosti v R

Test nezávislosti v kontingenční tabulce lze v programu R spočítat pomocí funkce **chisq.test**.



Koeficienty kontingence

Těsnost závislosti dvou nominálních znaků měříme pomocí tzv. **koeficientů kontingence.** Pro hodnocení intenzity závislosti mezi oběma ordinálními resp. nominálními proměnnými existují speciální charakteristiky:

- **Pearsonův koeficient**

$$K_1 = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}},$$

- **Cramerův koeficient**

$$K_2 = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot \min(r-1, s-1)}},$$

- **Čuprovův koeficient**

$$K_3 = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot \sqrt{(r-1)(s-1)}}}.$$

Poznámka: 0 $\rightarrow$ nezávislost, 1 $\rightarrow$ závislost

Spearmanův korelační koeficient

V případě dvourozměrného souboru kvalitativních údajů, které jsou po složkách ordinálního typu, je možno zjistit stupeň závislosti těchto dvou znaků. K měření takovýchto závislostí se používá **Spearmanův korelační koeficient**. Hodnotám x_i, y_i přiřadíme pořadí p_i, q_i (pořadí jednotlivých hodnot při uspořádaní podle velikosti). Spearmanův koeficient (koeficient pořadové korelace) je potom definován vztahem

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}{n(n^2-1)}.$$

Spearmanův korelační koeficient

Pro náhodný výběr šesti států USA byly zjištěny spotřeby cigaret na hlavu a roční míra úmrtnosti na 100 000 lidí následkem rakoviny plic. Určete, zda existuje významná korelace mezi těmito znaky.

	Spotřeba cigaret		Úmrtnost		
Stát USA	x_i	p_i	y_i	q_i	$(p_i - q_i)^2$
Delaware	3400	6	24	5	1
Indiana	2600	4	21	4	0
Iowa	2200	2	17	1	1
Montana	2400	3	19	2	1
New Yersy	2900	5	26	6	1
Washington	2100	1	20	3	4

Suma kvadrátů v posledním sloupci je 8,

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 8}{6 \cdot (6^2 - 1)} = 0{,}77143.$$

Pozn. Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$ je 0,829 (p-hodnota je 0,1028), korelace tedy nebyla prokázána.

Kendallův korelační koeficient

Mějme dvourozměrný datový soubor. Řekneme, že dvojice (x_i, y_i) a (x_j, y_j) jsou ve shodě (concordant), pokud platí, že $x_i > x_j$ a zároveň $y_i > y_j$ nebo $x_i < x_j$ a zároveň $y_i < y_j$. Řekneme, že nejsou ve shodě (discordant), pokud $x_i < x_j$ a zároveň $y_i > y_j$ nebo $x_i > x_j$ a zároveň $y_i < y_j$. V případě, že $x_i = x_j$ nebo $y_i = y_j$ nemluvíme ani o shodě, ani o neshodě. Označme počet dvoji ve shodě n_c a počet dvojic, které ve shodě nejsou n_d. **Kendallův korelační koeficient** je definován vztahem

$$\tau = \frac{n_c - n_d}{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Pro data z předchozího příkladu máme $n_c = 12$, $n_d = 3$, $n = 6$.

$$\tau = \frac{12 - 3}{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6-1)} = 0{,}6.$$

Pozn. Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$ je 0,8 (p-hodnota je 0,1361), korelace tedy nebyla prokázána.

Pearsonův korelační koeficient

Mějme dvourozměrný datový soubor $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$, označme $\overline{x}$ a $\overline{y}$ průměry znaků a s_x, s_y směrodatné odchylky znaků X, Y. **Koeficient korelace (Pearsonův)** definujeme vztahem

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y},$$

kde $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ je výběrová kovariance znaků X a Y,
$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ je výběrová směrodatná odchylka znaku X a
$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$ je výběrová směrodatná odchylka znaku Y.

Pearsonův korelační koeficient

Lze jej vyjádřit ve tvaru

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} =$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}.$$

Pearsonův korelační koeficient

Koeficient determinace je pro závislost popsanou regresní přímkou zvláštním případem indexu determinace, tedy platí $r_{yx}^2 = \frac{S_T}{S_Y}$. Tato míra těsnosti závislosti má zcela stejné vlastnosti jako i_{yx}^2.
Výběrový koeficient determinace r_{yx}^2 lze použít jako odhad teoretického koeficientu determinace ρ^2 v základním souboru. Úpravou

$$r_{kor}^2 = 1 - (1 - r^2)\frac{n-1}{n-2}$$

získáme nestranný odhad ρ^2.

Test významnosti korelačního koeficientu

$$H : \rho = 0 \rightarrow A : \rho \neq 0$$

Testové kritérium je statistika

$$t = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{n - 2} \sim t(n - 2).$$

Kritický obor je dán

$$W_\alpha : |t| \geq t_{1-\alpha/2}(n - 2).$$

Pokud hodnota testového kritéria padne do kritického oboru, podařila se prokázat lineární závislost mezi sledovanými proměnnými.

Koeficient mnohonásobné korelace

Koeficient mnohonásobné korelace vyjadřuje sílu závislosti jedné proměnné na dvou a více jiných proměnných. Mějme k proměnných $X_1, X_2, \ldots X_k$, jejich korelační matice je rovna

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1k} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1k} & 1 & r_{2k} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Koeficient mnohonásobné korelace popisující závislost X_1 na $X_2, \ldots X_k$ se určí ze vztahu

$$R_{1,23\ldots k} = \sqrt{1 - \frac{\det(\mathbf{R})}{\det(\mathbf{R}_{11})}},$$

kde $\mathbf{R}_{11}$ vznikne z $\mathbf{R}$ vynechání 1. řádku a 1. sloupce.

Koeficient mnohonásobné korelace

Koeficient mnohonásobné korelace vyjadřuje společné působení nezávisle proměnných $X_1, X_2, \ldots X_k$ na závisle proměnnou Y a určuje spolehlivost regresního odhadu. Výběrový koeficient mnohonásobné korelace pro případ regrese se dvěma nezávisle proměnnými ($Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \epsilon_i$) je roven

$$r_{y,xz} = \sqrt{\frac{r_{yx}^2 + r_{yz}^2 + 2 r_{yx} r_{yz} r_{xz}}{1 - r_{xz}^2}},$$

kde r_{yx} je výběrový korelační koeficient mezi hodnotami y_i a x_i, r_{yz} je výběrový korelační koeficient mezi y_i a z_i a r_{yx} je výběrový korelační koeficient mezi x_i a z_i. Jeho druhou mocninou je index determinace.