Základní pojmy teorie množin
Vektorové prostory

Přednáška MATEMATIKA č. 1

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

7. 10. 2010

Základní pojmy teorie množin

Množinou rozumíme souhrn určitých objektů chápaných jako samostatný celek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny. Zápis $x \in M$, resp. $x \notin M$ čteme: x je, resp. x není prvkem množiny M. Pro každý objekt x a množinu M platí právě jedna z možností $x \in M$, nebo $x \notin M$.

- $A = B$ rovnost množin
- $A \subset B$ množina A je podmnožinou množiny B
- $A \cup B$ sjednocení množin
- $A \cap B$ průnik množin
- $A - B$ rozdíl množin

Základní pojmy teorie množin

Nechť A a B jsou dvě množiny. Množina všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in A$, $y \in B$ se nazývá **kartézský součin množin A a B**, značí se $A \times B$.

Libovolnou podmnožinu kartézského součinu nazýváme **binární relace**.

Zobrazením f z množiny A do množiny B nazýváme každou binární relaci takovou, že každému prvku $x \in A$ je přiřazen nejvýše jeden prvek $y \in B$.

- $\mathbb{N}$ množina přirozených čísel
- $\mathbb{Z}$ množina celých čísel
- $\mathbb{R}$ množina reálných čísel
- $\mathbb{C}$ množina komplexních čísel

Vektorové prostory

Definice

Množina V libovolných prvků (značíme je $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{y}, \vec{z}$ říkáme jim **vektory**) se nazývá **vektorový prostor**, jestliže:

a) Je dáno zobrazení $V \times V \to V$, které každé uspořádané dvojici vektorů $(\vec{a}, \vec{b}) \in V$ přiřazuje vektor $\vec{a} + \vec{b} \in V$ tak, že pro každé vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ platí axiomy:

(A1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

(A2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,

(A3) ke každému vektoru $\vec{a} \in V$ existuje vektor $\vec{o} \in V$ tak, že platí $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$,

(A4) ke každému vektoru $\vec{a} \in V$ existuje vektor $-\vec{a} \in V$ tak, že platí $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$.

Toto zobrazení se nazývá sčítání na množině V a vektor $\vec{a} + \vec{b}$ je **součet** vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.

Vektorové prostory

Definice

Množina V libovolných prvků (značíme je $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{y}, \vec{z}$ říkáme jim **vektory**) se nazývá **vektorový prostor**, jestliže:

b) Je dáno zobrazení $\mathbb{R} \times V \to V$, které každé uspořádané dvojici $(r, \vec{b}) \in V$ přiřazuje vektor $r\vec{b} \in V$ tak, že pro každá reálná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ a pro každé vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí axiomy:

(A5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,

(A6) $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$,

(A7) $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$

(A8) $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$.

Toto zobrazení se nazývá násobení vektoru reálným číslem a vektor $r\vec{a}$ se nazývá **reálný násobek** vektoru $\vec{a}$.

Aritmetický vektorový prostor

Definice

Uspořádanou n-tici reálných čísel $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ nazýváme ***n*-rozměrným aritmetickým vektorem**. Reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **souřadnicemi** aritmetického vektoru $\vec{a}$.

Definice

Aritmetický vektor $\vec{o}$, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, tj.

$$\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0),$$

nazýváme **nulovým aritmetickým vektorem**.

Aritmetický vektorový prostor

Definice

Uspořádanou n-tici reálných čísel $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ nazýváme **n-rozměrným aritmetickým vektorem**. Reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **souřadnicemi** aritmetického vektoru $\vec{a}$.

Definice

Aritmetický vektor $\vec{o}$, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, tj.

$$\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0),$$

nazýváme **nulovým aritmetickým vektorem**.

Aritmetický vektorový prostor

Definice

- Řekneme, že aritmetický vektor $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ je **roven** aritmetickému vektoru $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, jestliže platí $a_i = b_i$ pro každé $i = 1 \dots n$. Píšeme $\vec{a} = \vec{b}$.
- **Součtem** aritmetických vektorů $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ nazýváme aritmetický vektor $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.
- Nechť $r \in \mathbb{R}$. **Reálným násobkem** aritmetického vektoru $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ je aritmetický vektor $r\vec{a} = (ra_1, \dots, ra_n)$.
- **Opačným aritmetickým vektorem** k aritmetickému vektoru $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ nazýváme aritmetický vektor $-\vec{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$.
- **Rozdílem** aritmetických vektorů $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ rozumíme součet aritmetický vektor $\vec{a}$ a aritmetického vektoru opačného k aritmetickému vektoru $\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$.

Podprostor vektorové prostoru

Definice

Nechť V je vektorový prostor, W neprázdná podmnožina množiny V. Řekneme, že množina W je **podprostor vektorového prostoru** V, a píšeme $W \subset V$, jestliže platí:

(1) Pro každou dvojici vektorů $\vec{a} \in W$, $\vec{b} \in W$ je $\vec{a} + \vec{b} \in W$.

(2) Pro každé reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ a každý vektor $\vec{a} \in W$ je $r\vec{a} \in W$.

Lineární kombinace vektorů

Definice

Nechť $\vec{a}, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V. Řekneme, že vektor $\vec{a}$ je **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$, jestliže existují reálná čísla $c_1, \ldots, c_k$ taková, že platí

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{a}_i = c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_k \vec{a}_k.$$

Čísla $c_1, \ldots, c_k$ se nazývají koeficienty lineární kombinace.

Lineární kombinace vektorů

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V. Množina $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k]$ všech lineárních kombinací vektorů $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ se nazývá **lineární obal** vektorů $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$.

Věta

Jsou-li $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ vektory z vektorového prostoru V, pak jejich lineární obal $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k]$ je podprostorem vektorového prostoru V.

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jestliže každý vektor $\vec{a} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$, říkáme, že vektorový prostor V je generován vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ a těmto vektorům říkáme **množina generátorů** vektorového prostoru V.

Lineární kombinace vektorů

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V. Množina $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ všech lineárních kombinací vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ se nazývá **lineární obal** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

Věta

Jsou-li $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ vektory z vektorového prostoru V, pak jejich lineární obal $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ je podprostorem vektorového prostoru V.

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jestliže každý vektor $\vec{a} \in V$ je lineární kombinaci vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, říkáme, že vektorový prostor V je generován vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ a těmto vektorům říkáme **množina generátorů** vektorového prostoru V.

Lineární kombinace vektorů

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V. Množina $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ všech lineárních kombinací vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ se nazývá **lineární obal** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

Věta

Jsou-li $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ vektory z vektorového prostoru V, pak jejich lineární obal $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ je podprostorem vektorového prostoru V.

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jestliže každý vektor $\vec{a} \in V$ je lineární kombinaci vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, říkáme, že vektorový prostor V je generován vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ a těmto vektorům říkáme **množina generátorů** vektorového prostoru V.

Lineární kombinace vektorů

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ je množina vektorů z vektorového prostoru V a $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q$ jsou vektory, které vznikly z vektorů $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jedním z následujících způsobů:

a) změna pořadí vektorů,

b) násobením libovolného vektoru nenulovým reálným číslem,

c) přičtením k libovolnému vektoru lineární kombinace ostatních vektorů,

d) vynecháním vektoru, který je lineární kombinací ostatních,

e) přidáním vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů.

Jestliže vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V, pak také vektory $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q$ tvoří množinu generátorů vektorového prostor V.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Řekneme, že vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou **lineárně závislé**, jestliže existují reálná čísla $c_1, \ldots, c_k$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_k\vec{a}_k = \vec{o}$$

V opačném případě se vektory nazývají **lineárně nezávislé**.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V, $k \geq 2$. Vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V, $k \geq 2$. Pak také vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V, $k \geq 2$. Vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinaci ostatních.

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V, $k \geq 2$. Pak také vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Definice

Množina generátorů vektorového prostoru V, jejíž vektory jsou lineárně nezávislé, se nazývá **báze vektorového prostoru**.

Věta

Nechť V je vektorový prostor s bázi $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$. Pak každá skupina k lineárně nezávislých vektorů $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k \in V$ tvoří také bázi vektorového prostoru V.

Věta

Existuje-li ve vektorovém prostoru V báze o k vektorech, pak každá skupina obsahující více než k vektorů je lineárně závislá.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Definice

Množina generátorů vektorového prostoru V, jejíž vektory jsou lineárně nezávislé, se nazývá **báze vektorového prostoru**.

Věta

Nechť V je vektorový prostor s bázi $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$. Pak každá skupina k lineárně nezávislých vektorů $\vec{b}_1, \dots, b_k \in V$ tvoří také bázi vektorového prostoru V.

Věta

Existuje-li ve vektorovém prostoru V báze o k vektorech, pak každá skupina obsahující více než k vektorů je lineárně závislá.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Definice

Množina generátorů vektorového prostoru V, jejíž vektory jsou lineárně nezávislé, se nazývá **báze vektorového prostoru**.

Věta

Nechť V je vektorový prostor s bázi $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$. Pak každá skupina k lineárně nezávislých vektorů $\vec{b}_1, \dots, b_k \in V$ tvoří také bázi vektorového prostoru V.

Věta

Existuje-li ve vektorovém prostoru V báze o k vektorech, pak každá skupina obsahující více než k vektorů je lineárně závislá.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Definice

Počet vektorů v libovolné bázi vektorového prostoru V se nazývá **dimenze vektorového prostoru** V a značí se $\dim V$.

Věta

Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V, pak platí $\dim W \leq \dim V$. Rovnost $\dim W = \dim V$ platí právě tehdy, když $W = V$.

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Platí

$$\dim[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k] \leq \min\{\dim V, k\}.$$

Báze a dimenze vektorového prostoru

Definice

Počet vektorů v libovolné bázi vektorového prostoru V se nazývá **dimenze vektorového prostoru** V a značí se $\dim V$.

Věta

Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V, pak platí $\dim W \leq \dim V$. Rovnost $\dim W = \dim V$ platí právě tehdy, když $W = V$.

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Platí

$$\dim[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k] \leq \min\{\dim V, k\}.$$

Báze a dimenze vektorového prostoru

Definice

Počet vektorů v libovolné bázi vektorového prostoru V se nazývá **dimenze vektorového prostoru** V a značí se $\dim V$.

Věta

Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V, pak platí $\dim W \leq \dim V$. Rovnost $\dim W = \dim V$ platí právě tehdy, když $W = V$.

Věta

Nechť $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Platí

$$\dim[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k] \leq \min\{\dim V, k\}.$$