Matice

Přednáška MATEMATIKA č. 2

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

13. 10. 2010

Matice

Definice

Uspořádané schéma vytvořené z $m \times n$ reálných čísel, kde $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **matice typu** $m \times n$.

Matice

Definice

Nechť **A**, **B** jsou matice stejného typu $m \times n$. Říkáme, že matice **A**, **B** jsou si rovny, a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jestliže pro každé $i = 1, \ldots, m$ a každé $j = 1, \ldots n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Matice

Definice

- Matice typu $m \times n$, pro jejíž všechny prvky platí $a_{ij} = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, se nazývá **nulová matice typu** $m \times n$. Nulovou matici značíme $\mathbf{0}_{m \times n}$ nebo stručněji $\mathbf{0}$.
- **Čtvercová matice** řádu n je matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$.
- **Jednotková matice** $\mathbf{E}_n$ řádu n je čtvercová matice taková, že platí

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice

Definice

Diagonální matice je taková čtvercová matice, pro jejíž prvky platí $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$. Matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že zaměníme řádky za sloupce, přičemž zachováme jejich pořadí, se nazývá **matice transponovaná** k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matice

Definice

Diagonální matice je taková čtvercová matice, pro jejíž prvky platí $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$. Matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že zaměníme řádky za sloupce, přičemž zachováme jejich pořadí, se nazývá **matice transponovaná** k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matice

Definice

Matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ se nazývá **trojúhelníková matice**, jestliže

a) $m \leq n$,

b) $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Definice

Matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ vynecháním některých řádků nebo sloupců, se nazývá **submatice** matice $\mathbf{A}$.

Matice

Definice

Matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ se nazývá **trojúhelníková matice**, jestliže

a) $m \leq n$,

b) $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Definice

Matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ vynecháním některých řádků nebo sloupců, se nazývá **submatice** matice $\mathbf{A}$.

Operace s maticemi

Definice

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou matice (stejného) typu $m \times n$. Matice $\mathbf{C}$ typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

se nazývá **součet matic** $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a značí se $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Definice

Nechť r je reálné číslo, $\mathbf{A}$ matice typu $m \times n$. Matice D typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$d_{ij} = ra_{ij}$$

se nazývá **reálný násobek** matice $\mathbf{A}$ a značí se $r\mathbf{A}$.

Operace s maticemi

Definice

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou matice (stejného) typu $m \times n$. Matice $\mathbf{C}$ typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

se nazývá **součet matic** $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a značí se $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Definice

Nechť r je reálné číslo, $\mathbf{A}$ matice typu $m \times n$. Matice D typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$d_{ij} = ra_{ij}$$

se nazývá **reálný násobek** matice $\mathbf{A}$ a značí se $r\mathbf{A}$.

Operace s maticemi

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{0}$ jsou matice téhož typu a $r, s \in \mathbb{R}$ libovolná reálná čísla. Pak platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ ... komutativní zákon pro sčítání matic,
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ ... asociativní zákon pro sčítání matic,
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ ... existence nulové matice,
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ ... existence opačné matice,
5. $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$ ... asociativní zákon pro reálný násobek,
6. $(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$ ... první distributivní zákon,
7. $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$ ... druhý distributivní zákon.

Věta

Množina $V_{m \times n}$ spolu s operacemi násobení matic a reálného násobku matice tvoří vektorový prostor.

Operace s maticemi

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{0}$ jsou matice téhož typu a $r, s \in \mathbb{R}$ libovolná reálná čísla. Pak platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ . . . komutativní zákon pro sčítání matic,
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ . . . asociativní zákon pro sčítání matic,
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ . . . existence nulové matice,
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . . . existence opačné matice,
5. $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$ . . . asociativní zákon pro reálný násobek,
6. $(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$ . . . první distribuční zákon,
7. $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$ . . . druhý distribuční zákon.

Věta

Množina $V_{m \times n}$ spolu s operacemi násobení matic a reálného násobku matice tvoří vektorový prostor.

Operace s maticemi

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{B}$ matice typu $n \times p$. Matice $\mathbf{C}$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$$

se nazývá **součin matic A a B** a značí se $\mathbf{AB}$.

Z definice součinu matic vyplývá, že prvek ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{C}$ dostaneme jako skalární součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbf{B}$.

Operace násobení matic není komutativní, existují matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ takové, že $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Navíc se může stát, že jeden ze součinů matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je definován a druhý definován není.

Operace s maticemi

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{B}$ matice typu $n \times p$. Matice $\mathbf{C}$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$$

se nazývá **součin matic A a B** a značí se $\mathbf{AB}$.

Z definice součinu matic vyplývá, že prvek ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{C}$ dostaneme jako skalární součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbf{B}$.

Operace násobení matic není komutativní, existují matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ takové, že $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Navíc se může stát, že jeden ze součinů matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je definován a druhý definován není.

Operace s maticemi

Věta

Pro každé tři matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ typu $n \times p$ a $\mathbf{C}$ typu $p \times q$ platí

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Věta

Pro každé tři matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ typu $n \times p$ a $\mathbf{C}$ typu $n \times p$ platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Pro každé tři matice $\mathbf{A}$ typu $n \times p$, $\mathbf{B}$ typu $m \times n$ a $\mathbf{C}$ typu $m \times n$ platí

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

Operace s maticemi

Věta

Pro každé tři matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ typu $n \times p$ a $\mathbf{C}$ typu $p \times q$ platí

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Věta

Pro každé tři matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ typu $n \times p$ a $\mathbf{C}$ typu $n \times p$ platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Pro každé tři matice $\mathbf{A}$ typu $n \times p$, $\mathbf{B}$ typu $m \times n$ a $\mathbf{C}$ typu $m \times n$ platí

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

Hodnost matice

Definice

Dimenze lineárního obalu generovaného řádkovými vektory matice $\mathbf{A}$ se nazývá hodnost matice $\mathbf{A}$ a značí se $h(\mathbf{A})$.

Věta

Pro hodnost matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ platí $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

Věta

Hodnost trojúhelníkové matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je rovna počtu řádků této matice, tj. $h(\mathbf{A}) = m$.

Hodnost matice

Definice

Dimenze lineárního obalu generovaného řádkovými vektory matice $\mathbf{A}$ se nazývá hodnost matice $\mathbf{A}$ a značí se $h(\mathbf{A})$.

Věta

Pro hodnost matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ platí $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

Věta

Hodnost trojúhelníkové matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je rovna počtu řádků této matice, tj. $h(\mathbf{A}) = m$.

Hodnost matice

Definice

Dimenze lineárního obalu generovaného řádkovými vektory matice $\mathbf{A}$ se nazývá hodnost matice $\mathbf{A}$ a značí se $h(\mathbf{A})$.

Věta

Pro hodnost matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ platí $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

Věta

Hodnost trojúhelníkové matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je rovna počtu řádků této matice, tj. $h(\mathbf{A}) = m$.

Hodnost matice

Hodnost matice budeme určovat tak, že ji pomocí tzv. **ekvivalentních úprav** převedeme na schodovitý tvar (každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předcházející).

Ekvivalentní úpravy matice

(U1) záměna pořadí řádků matice,

(U2) násobení libovolného řádku matice nenulovým reálným číslem,

(U3) přičtení k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních řádků,

(U4) vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Počet nenulových řádků takto upravené matice potom určuje hodnost matice.

Hodnost matice

Věta

Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nemění, zaměníme-li v matici $\mathbf{A}$ libovolně pořadí sloupců.

Věta

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované matice. Platí

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T).$$

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **regulární**, jestliže platí $h(\mathbf{A}) = n$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **singulární**, jestliže platí $h(\mathbf{A}) < n$.

Hodnost matice

Věta

Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nemění, zaměníme-li v matici $\mathbf{A}$ libovolně pořadí sloupců.

Věta

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované matice. Platí

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T).$$

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **regulární**, jestliže platí $h(\mathbf{A}) = n$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **singulární**, jestliže platí $h(\mathbf{A}) < n$.

Hodnost matice

Věta

Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nemění, zaměníme-li v matici $\mathbf{A}$ libovolně pořadí sloupců.

Věta

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované matice. Platí

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T).$$

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **regulární**, jestliže platí $h(\mathbf{A}) = n$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **singulární**, jestliže platí $h(\mathbf{A}) < n$.