Determinanty

Přednáška MATEMATIKA č. 3

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

21. 10. 2010

Determinanty

Uvažujme neprázdnou množinu přirozených čísel $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Z kombinatoriky víme, že každá uspořádaná n-tice $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sestávající ze všech čísel množiny M se nazývá **permutace** množiny M a že počet všech permutací množiny M je roven číslu $n!$. V dalším textu budeme libovolnou z $n!$ permutací množiny M značit $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Definice

Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je neprázdná množina přirozených čísel, $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ určitá permutace množiny M. Uspořádaná dvojice (k_i, k_j) se nazývá **inverze** v permutaci $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, jestliže platí $i < j$ a zároveň $k_i > k_j$. Permutace, která má sudý počet inverzí, se nazývá **sudá**, permutace, která má lichý počet inverzí se nazývá **lichá**.

Determinanty

Uvažujme neprázdnou množinu přirozených čísel $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Z kombinatoriky víme, že každá uspořádaná n-tice $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ sestávající ze všech čísel množiny M se nazývá **permutace** množiny M a že počet všech permutací množiny M je roven číslu $n!$. V dalším textu budeme libovolnou z $n!$ permutací množiny M značit $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Definice

Nechť $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ je neprázdná množina přirozených čísel, $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ určitá permutace množiny M. Uspořádaná dvojice (k_i, k_j) se nazývá **inverze** v permutaci $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, jestliže platí $i < j$ a zároveň $k_i > k_j$. Permutace, která má sudý počet inverzí, se nazývá **sudá**, permutace, která má lichý počet inverzí se nazývá **lichá**.

Determinanty

Věta

Jestliže v permutaci $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ zaměníme vzájemně dva prvky, změní se lichá permutace na sudou nebo sudá permutace na lichou.

Definice

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Reálné číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_k (-1)^\alpha a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

kde $\sum_k$ značí součet pře všechny možné permutace $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$ a α je počet inverzí v permutaci K, se nazývá **determinant matice A**.

Determinanty

Věta

Jestliže v permutaci $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ zaměníme vzájemně dva prvky, změní se lichá permutace na sudou nebo sudá permutace na lichou.

Definice

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Reálné číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_k (-1)^\alpha a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

kde $\sum_k$ značí součet pře všechny možné permutace $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ a α je počet inverzí v permutaci K, se nazývá **determinant matice A**.

Determinanty

Determinant čtvercové matice **A** řádu n zapisujeme ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantů řádu $n = 1, 2, 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Výpočet determinantů řádu $n = 1, 2, 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Výpočet determinantů řádu $n = 1, 2, 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} +$$
$$+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Vlastnosti determinantů

Věta

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak pro $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \mathbf{A}_{ik},$$

kde $\mathbf{A}_{ik}$ je subdeterminant (doplněk prvku a_{ik}), který vznikne z determinantu matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého a k-tého sloupce

Determinant lze také rozvinout podle libovolného sloupce, tedy pro $j = 1, \ldots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \mathbf{A}_{kj},$$

kde $\mathbf{A}_{kj}$ je determinant řádu $n-1$, který vzniká z determinantu matice $\mathbf{A}$ vynecháním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Vlastnosti determinantů

Věta

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \mathbf{A}_{ik},$$

kde $\mathbf{A}_{ik}$ je subdeterminant (doplněk prvku a_{ik}), který vznikne z determinantu matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého a k-tého sloupce

Determinant lze také rozvinout podle libovolného sloupce, tedy pro $j = 1, \dots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \mathbf{A}_{kj},$$

kde $\mathbf{A}_{kj}$ je determinant řádu $n-1$, který vzniká z determinantu matice $\mathbf{A}$ vynecháním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Vlastnosti determinantů

Věta

- Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované čtvercové matice, platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
- Vynásobíme-li všechny prvky některého řádku (sloupce) matice $\mathbf{A}$ týmž číslem c, obdržíme matici $\mathbf{A}'$ pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = c \det \mathbf{A}$.
- Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ mezi sebou dva řádky (dva sloupce), dostaneme matici $\mathbf{A}'$, pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = -\det \mathbf{A}$.
- Přičteme-li k jednomu řádku $\mathbf{A}$ matice libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ se nezmění.

Vlastnosti determinantů

Věta

- Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované čtvercové matice, platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
- Vynásobíme-li všechny prvky některého řádku (sloupce) matice $\mathbf{A}$ týmž číslem c, obdržíme matici $\mathbf{A}'$ pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = c \det \mathbf{A}$.
- Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ mezi sebou dva řádky (dva sloupce), dostaneme matici $\mathbf{A}'$, pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = -\det \mathbf{A}$.
- Přičteme-li k jednomu řádku $\mathbf{A}$ matice libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ se nezmění.

Vlastnosti determinantů

Věta

- Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované čtvercové matice, platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
- Vynásobíme-li všechny prvky některého řádku (sloupce) matice $\mathbf{A}$ týmž číslem c, obdržíme matici $\mathbf{A}'$ pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = c \det \mathbf{A}$.
- Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ mezi sebou dva řádky (dva sloupce), dostaneme matici $\mathbf{A}'$, pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = -\det \mathbf{A}$.
- Přičteme-li k jednomu řádku $\mathbf{A}$ matice libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ se nezmění.

Vlastnosti determinantů

Věta

- Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$ jsou navzájem transponované čtvercové matice, platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
- Vynásobíme-li všechny prvky některého řádku (sloupce) matice $\mathbf{A}$ týmž číslem c, obdržíme matici $\mathbf{A}'$ pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = c \det \mathbf{A}$.
- Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ mezi sebou dva řádky (dva sloupce), dostaneme matici $\mathbf{A}'$, pro jejíž determinant platí $\det \mathbf{A}' = -\det \mathbf{A}$.
- Přičteme-li k jednomu řádku $\mathbf{A}$ matice libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ se nezmění.

Vlastnosti determinantů

- Determinant matice **A**, který má v některém řádku (sloupci) vesměs nuly, je roven nule.
- Má-li matice **A** dva řádky (sloupce) stejné, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
- Determinant matice **A**, jejíž řádky (sloupce) jsou lineárně závislé, je roven nule.

Vlastnosti determinantů

- Determinant matice **A**, který má v některém řádku (sloupci) vesměs nuly, je roven nule.
- Má-li matice **A** dva řádky (sloupce) stejné, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
- Determinant matice **A**, jejíž řádky (sloupce) jsou lineárně závislé, je roven nule.

Vlastnosti determinantů

- Determinant matice $\mathbf{A}$, který má v některém řádku (sloupci) vesměs nuly, je roven nule.
- Má-li matice $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
- Determinant matice $\mathbf{A}$, jejíž řádky (sloupce) jsou lineárně závislé, je roven nule.

Vlastnosti determinantů

Věta

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n v trojúhelníkovém tvaru. Determinant matice $\mathbf{A}$ je roven součinu prvků na hlavní diagonále, tj.

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

.

Věta

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když její determinant je různý od nuly.

Vlastnosti determinantů

Věta

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n v trojúhelníkovém tvaru. Determinant matice $\mathbf{A}$ je roven součinu prvků na hlavní diagonále, tj.

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

.

Věta

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když její determinant je různý od nuly.

Kondenzační metoda výpočtu determinantů

Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice a $\mathbf{B}$ její submatice vzniklá z matice $\mathbf{A}$ vynecháním některých jejích řádků a sloupců. Je-li $\mathbf{B}$ opět čtvercová matice, nazýváme $\det \mathbf{B}$ **subdeterminantem** matice $\mathbf{A}$ nebo **minorem** matice $\mathbf{A}$.

Kondenzační metoda výpočtu determinantů

Věta

Nechť v matici $\mathbf{A}$ řádu $n \geq 3$ je prvek $a_{11} \neq 0$. Pak pro hodnotu determinantu matice $\mathbf{A}$ platí vztah

$$\det \mathbf{A} = a_{11}^{2-n} \det \mathbf{A}',$$

kde $\det \mathbf{A}'$ je determinant matice $\mathbf{A}'$ řádu $n-1$, jejímiž prvky a'_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n-1$ jsou minory druhého řádu matice $\mathbf{A}$ tvaru

$$a'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,j+1} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}.$$

Kondenzační metoda výpočtu determinantů

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}^{2-n} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,3} \\ a_{n,1} & a_{n,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$