Soustavy lineárních rovnic

Přednáška MATEMATIKA č. 4

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

27. 10. 2010

Soustava lineárních rovnic

Definice

Soustava rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

kde $a_{ij}, b_i, (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ jsou reálná čísla a x_j jsou **neznámé**, se nazývá **soustava** m **lineárních rovnic o** n **neznámých**, stručně **soustava lineárních rovnic** (ozn. $S(m, n)$). Čísla a_{ij} nazýváme **koeficienty** soustavy, čísla b_i **absolutními členy.**

Soustava lineárních rovnic

Definice

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **matice soustavy**. Matice

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

je **rozšířená matice soustavy**. Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ se nazývá **vektor řešení** soustavy a vektor $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ je **vektor absolutních členů**.

Soustava lineárních rovnic

Pokud

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

pak soustavu $S(m, n)$ můžeme zapsat jako

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Jestliže ponecháme vektory $\vec{x}$ a $\vec{b}$ jako řádkové vektory, potom

$$\mathbf{A}\vec{x}^T = \vec{b}^T.$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Věta (Frobeniova věta)

Soustava lineárních rovnic $S(m, n)$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy $\mathbf{A}$ se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_r$.

Věta

Nechť soustava lineárních rovnic $S(m, n)$ má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých. Platí:

a) Jestliže $h = n$, má soustava $S(m, n)$ právě jedno řešení.

b) Jestliže $h < n$, má soustava $S(m, n)$ nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Věta (Frobeniova věta)

Soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy $\mathbf{A}$ se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_r$.

Věta

Nechť soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých. Platí:

a) Jestliže $h = n$, má soustava $S(m,n)$ právě jedno řešení.
b) Jestliže $h < n$, má soustava $S(m,n)$ nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Nechť soustava lineárních rovnic $S(m, n)$ má nekonečně mnoho řešení. Vztah zahrnující všechna řešení soustavy se nazývá **obecné řešení soustavy**. Dosadíme-li za volné neznámé konkrétní reálná čísla, dostaneme jedno řešení soustavy, které nazýváme **partikulární řešení soustavy**. Partikulární řešení soustavy, ve kterém jsou všechny volné neznáme rovny nule, se nazývá **základní řešení soustavy**.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Definice

Soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ se nazývá homogenní, jestliže platí $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Homogenní soustavu lineárních rovnic budeme stručně značit $S_0(m,n)$.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Věta

Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení. Označíme-li h hodnost matice soustavy a n počet neznámých, platí:

a) Jestliže $h = n$, má homogenní soustava jediné řešení $x = (0, \ldots, 0)$.

b) Jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých $n - h$ parametrech.

Věta

Nechť matice $\mathbf{A}$ soustavy lineárních rovnic $S_0(m, n)$ má hodnost $h(\mathbf{A}) = h < n$. Obecné řešení soustavy tvoří vektorový prostor dimenze $n - h$, takže báze tohoto prostoru obsahuje $n - h$ lineárně nezávislých řešení a všechna ostatní řešení jsou jejich lineárními kombinacemi.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Věta

Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení. Označíme-li h hodnost matice soustavy a n počet neznámých, platí:

a) Jestliže $h = n$, má homogenní soustava jediné řešení $x = (0, \ldots, 0)$.

b) Jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých $n - h$ parametrech.

Věta

Nechť matice $\mathbf{A}$ soustavy lineárních rovnic $S_0(m, n)$ má hodnost $h(\mathbf{A}) = h < n$. Obecné řešení soustavy tvoří vektorový prostor dimenze $n - h$, takže báze tohoto prostoru obsahuje $n - h$ lineárně nezávislých řešení a všechna ostatní řešení jsou jejich lineárními kombinacemi.

Metody řešení soustav lineárních rovnic

Definice

Dvě soustavy lineárních rovnic $S_1(m, n)$ a $S_2(m, n)$ se stejnými neznámými $x_1, \ldots, x_n$ se nazývají **ekvivalentní**, jestliže množina všech řešení soustavy je rovna množině všech řešení soustavy.

Ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic

(R1) záměna pořadí rovnic,

(R2) násobení libovolné rovnice nenulovým reálným číslem,

(R3) přičtení lineární kombinace rovnic soustavy k jiné rovnici soustavy,

(R4) vynechání rovnice, která je lineární kombinací jiných rovnic dané soustavy,

(R5) záměna pořadí neznámých.

Metody řešení soustav lineárních rovnic

Definice

Dvě soustavy lineárních rovnic $S_1(m, n)$ a $S_2(m, n)$ se stejnými neznámými $x_1, \dots, x_n$ se nazývají **ekvivalentní**, jestliže množina všech řešení soustavy je rovna množině všech řešení soustavy.

Ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic

(R1) záměna pořadí rovnic,

(R2) násobení libovolné rovnice nenulovým reálným číslem,

(R3) přičtení lineární kombinace rovnic soustavy k jiné rovnici soustavy,

(R4) vynechání rovnice, která je lineární kombinací jiných rovnic dané soustavy,

(R5) záměna pořadí neznámých.

Gaussova eliminační metoda

Postup

1. Soustavě lineárních rovnic $S(m, n)$ přiřadíme její rozšířenou matici $\mathbf{A}_r$.
2. Rozšířenou matici soustavy převedeme ekvivalentními úpravami na trojúhelníkovou matici (matici ve schodovitém tvaru).
3. Rozhodneme o řešitelnosti soustavy a počtu řešení.
4. Trojúhelníkové matici (matici ve schodovitém tvaru) přiřadíme soustavu lineárních rovnic ekvivalentní soustavě $S(m, n)$.
5. Vzniklou soustavu lineárních rovnic „zdola" vyřešíme.

Jordanova metoda úplné eliminace

Postup

1. Rozšířenou matici soustavy převedeme na trojúhelníkovou matici.
2. V trojúhelníkové matici vynulujeme prvky nad hlavní diagonálou.
3. Na hlavní diagonále takto upravené matice vytvoříme pomocí ekvivalentních úprava jedničky.
4. Výsledné matici zpětně přiřadíme soustavu, kterou již snadno vyřešíme.

Cramerovo pravidlo

Věta

Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}.$$

Jestliže je matice soustavy $\mathbf{A}$ regulární, pak má soustava právě jedno řešení tvaru

$$x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}}, j = 1, \dots, n,$$

kde $\mathbf{A}_j$ je matice vzniklá z matice soustavy $\mathbf{A}$ výměnou jejího j-tého sloupce sloupcem pravých stran.