# Maticová algebra

## Přednáška MATEMATIKA č. 5

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

4. 11. 2010

# Inverzní matice

**Definice**

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice $n$-tého řádu. Matice $\mathbf{X}$, pro kterou platí

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E}_n$$

se nazývá **inverzní matice** k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^{-1}$.

**Věta**

Ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je regulární. V tom případě je inverzní matice určena jednoznačně.

# Inverzní matice

## Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice $n$-tého řádu. Matice $\mathbf{X}$, pro kterou platí

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E}_n$$

se nazývá **inverzní matice** k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^{-1}$.

## Věta

Ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je regulární. V tom případě je inverzní matice určena jednoznačně.

# Inverzní matice – výpočet

Čtvercovou matici **A** rozšíříme o sloupce jednotkové matice $\mathbf{E}_n$. Tak vzniká matice

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Tuto matici upravíme ekvivalentními řádkovými úpravami tak, aby na místě matice **A** vznikla jednotková matice $\mathbf{E}_n$. Matice tvořená zbylými $n$ sloupci je pak inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1})$$

# Inverzní matice

**Věta**

Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, pak matice $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{A}$ je rovněž regulární a platí

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}.$$

**Důsledek**

Pro regulární matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$$

# Inverzní matice

**Věta**

Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, pak matice $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{A}$ je rovněž regulární a platí
$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}.$$

**Důsledek**

Pro regulární matici $\mathbf{A}$ platí
$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$$

# Inverzní matice – výpočet

**Věta**

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice vytvořená z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}$. Pak inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ má tvar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^*)^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^*_{11} & \mathbf{A}^*_{21} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n1} \\ \mathbf{A}^*_{12} & \mathbf{A}^*_{22} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}^*_{1n} & \mathbf{A}^*_{2n} & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn} \end{pmatrix}$$

Matice$(\mathbf{A}^*)^T$ se nazývá **adjungovaná** k matici $\mathbf{A}$ a označuje se též adj $A$.

Algebraický doplněk $A^*_{ij} = (-1)^{i+j}\mathbf{A}_{ij}$, kde $\mathbf{A}_{ij}$ je subdeterminant, který vznikne z determinantu matice $\mathbf{A}$ vynecháním $i$-tého a $j$-tého sloupce.

# Maticové rovnice

**Věta**

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n$, $\mathbf{B}$ libovolná matice typu $n \times p$. Maticová rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ má právě jedno řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

**Věta**

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n$, $\mathbf{B}$ libovolná matice typu $m \times n$. Maticová rovnice $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ má právě jedno řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}.$$

# Maticové rovnice

**Věta**

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n$, $\mathbf{B}$ libovolná matice typu $n \times p$. Maticová rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ má právě jedno řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

**Věta**

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n$, $\mathbf{B}$ libovolná matice typu $m \times n$. Maticová rovnice $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ má právě jedno řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}.$$