Náhodná veličina

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie, FVL, UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

Náhodná veličina

Výsledky některých náhodných pokusů jsou přímo vyjádřeny číselně (např. při hodu kostkou padne 6). Náhodnou veličinou budeme rozumět číselné ohodnocení výsledku náhodného pokusu.

Definice

Náhodná veličina je reálná funkce $X(\omega)$ definovaná na množině elementárních jevů Ω. Každému elementárnímu jevu ω z množiny elementárních jevů Ω přiřazuje právě jedno reálné číslo $X(\omega) = x$. Obor hodnot veličiny X je množina $M = \{x; X(\omega) = x\}$.

Náhodná veličina

- Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy $X, Y, \ldots$ (příp. $X_1, X_2, \ldots$) a jejich konkrétní realizace malými písmeny $x, y, \ldots$. Pomocí náhodných veličin můžeme zavést náhodné jevy např. $X = x, X \leq x, x_1 < X < x_2$ a podobně.
- Náhodnou veličinou je např. životnost výrobku, která může teoreticky nabýt jakékoli nezáporné hodnoty, doba čekání na obsluhu, u níž je rovněž $M = \{x; x \geq 0\}$, počet poruch na zařízení během 100 hodin provozu, kde $M = \{x; x = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Náhodná veličina

- Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy $X, Y, \dots$ (příp. $X_1, X_2, \dots$) a jejich konkrétní realizace malými písmeny $x, y, \dots$. Pomocí náhodných veličin můžeme zavést náhodné jevy např. $X = x, X \leq x, x_1 < X < x_2$ a podobně.
- Náhodnou veličinou je např. životnost výrobku, která může teoreticky nabýt jakékoli nezáporné hodnoty, doba čekání na obsluhu, u níž je rovněž $M = \{x; x \geq 0\}$, počet poruch na zařízení během 100 hodin provozu, kde $M = \{x; x = 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Náhodná veličina

Podle oboru hodnot M rozdělujeme náhodné veličiny na

- **nespojité (diskrétní)** . . . M je konečná nebo spočetná množina,
- **spojité** . . . M je uzavřený nebo otevřený interval.

Náhodná veličina

Podle oboru hodnot M rozdělujeme náhodné veličiny na

- **nespojité (diskrétní)** ... M je konečná nebo spočetná množina,
- **spojité** ... M je uzavřený nebo otevřený interval.

Náhodná veličina

Příklady:
Diskrétní náhodná veličina: počet členů domácnosti ($M = \{1, 2, \dots\}$), počet poruch stroje během jedné pracovní směny ($M = \{0, 1, 2, \dots\}$), počet rozbitých lahví v zásilce 1000 lahví ($M = \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$), počet narozených chlapců mezi 500 novorozeňaty ($M = \{0, 1, 2, \dots, 500\}$), apod.

Spojitá náhodná veličina: hmotnost rohlíku ($M = (0, \infty)$), množství alkoholu v destilátu měřené v procentech ($M = (0, 100)$), hodnota elektrického napětí v rozvodné síti ($M = \langle 0, \infty)$), doba čekání na vlak metra, který jezdí v pravidelných 10-ti minutových intervalech ($M = \langle 0, 10)$) apod.

Náhodná veličina

Příklady:
Diskrétní náhodná veličina: počet členů domácnosti ($M = \{1, 2, \dots\}$), počet poruch stroje během jedné pracovní směny ($M = \{0, 1, 2, \dots\}$), počet rozbitých lahví v zásilce 1000 lahví ($M = \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$), počet narozených chlapců mezi 500 novorozeňaty ($M = \{0, 1, 2, \dots, 500\}$), apod.

Spojitá náhodná veličina: hmotnost rohlíku ($M = (0, \infty)$), množství alkoholu v destilátu měřené v procentech ($M = (0, 100)$), hodnota elektrického napětí v rozvodné síti ($M = \langle 0, \infty)$), doba čekání na vlak metra, který jezdí v pravidelných 10-ti minutových intervalech ($M = \langle 0, 10)$) apod.

Náhodná veličina

Pro úplný popis náhodné veličiny je nutné znát nejen množinu hodnot M, ale i pravděpodobnosti výskytu těchto hodnot (zákon rozdělení náhodné veličiny).

Zákon rozdělení – pravidlo, které každé množině B hodnot náhodné veličiny přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z množiny B.

Náhodná veličina

Popis náhodné veličiny provádíme nejčastěji pomocí funkcí a pomocí charakteristik. Budeme definovat

- distribuční funkci $F(x)$,
- pravděpodobnostní funkci $p(x)$,
- funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

Dále zavedeme

- charakteristiky polohy,
- charakteristiky variability,
- charakteristiky koncentrace.

Náhodná veličina

Popis náhodné veličiny provádíme nejčastěji pomocí funkcí a pomocí charakteristik. Budeme definovat

- distribuční funkci $F(x)$,
- pravděpodobnostní funkci $p(x)$,
- funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

Dále zavedeme

- charakteristiky polohy,
- charakteristiky variability,
- charakteristiky koncentrace.

Distribuční funkce

Definice

Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X přiřazuje každému reálnému číslu x pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné číslu x, tedy

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Distribuční funkce

Uvedeme některé důležité vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
- pro každou distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

  pokud je obor možných hodnot $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
- pro každá reálná čísla x_1 a x_2 platí $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Distribuční funkce

Uvedeme některé důležité vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
- pro každou distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

  pokud je obor možných hodnot $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
- pro každá reálná čísla x_1 a x_2 platí $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Distribuční funkce

Uvedeme některé důležité vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
- pro každou distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

  pokud je obor možných hodnot $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
- pro každá reálná čísla x_1 a x_2 platí $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Distribuční funkce

Uvedeme některé důležité vlastnosti distribuční funkce $F(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $F(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce,
- pro každou distribuční funkci platí

  $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

  pokud je obor možných hodnot $M = \{x; x \in (a, b\rangle\}$, potom $F(a) = 0$ a $F(b) = 1$,
- pro každá reálná čísla x_1 a x_2 platí $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Pravděpodobnostní funkce

Kromě funkce distribuční se pro popis diskrétní (nespojité) náhodné veličiny používá pravděpodobnostní funkce.

Definice

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ každému reálnému číslu x přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty, tedy

$$p(x) = P(X = x).$$

Pravděpodobnostní funkce

Zmíníme některé důležité vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
- součet pravděpodobností přes celý obor hodnot náhodné veličiny je roven 1, tedy
$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$
- pro každé reálné číslo x platí
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in (-\infty, x\rangle \cap M} p(t),$$
- pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \leq x_2)$ platí
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x \in \langle x_1, x_2 \rangle \cap M} p(x).$$

Pravděpodobnostní funkce

Zmíníme některé důležité vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \le p(x) \le 1$,
- součet pravděpodobností přes celý obor hodnot náhodné veličiny je roven 1, tedy

$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$

- pro každé reálné číslo x platí

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \in (-\infty, x\rangle \cap M} p(t),$$

- pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \le x_2)$ platí

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \sum_{x \in \langle x_1, x_2 \rangle \cap M} p(x).$$

Pravděpodobnostní funkce

Zmíníme některé důležité vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
- součet pravděpodobností přes celý obor hodnot náhodné veličiny je roven 1, tedy
$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$
- pro každé reálné číslo x platí
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in (-\infty, x\rangle \cap M} p(t),$$
- pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 $(x_1 \leq x_2)$ platí
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x \in \langle x_1, x_2 \rangle \cap M} p(x).$$

Pravděpodobnostní funkce

Zmíníme některé důležité vlastnosti pravděpodobnostní funkce $p(x)$:

- pro každé reálné číslo x platí $0 \leq p(x) \leq 1$,
- součet pravděpodobností přes celý obor hodnot náhodné veličiny je roven 1, tedy
$$\sum_{x \in M} p(x) = 1.$$
- pro každé reálné číslo x platí
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in (-\infty, x\rangle \cap M} p(t),$$
- pro každá 2 reálná čísla x_1 a x_2 ($x_1 \leq x_2$) platí
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x \in \langle x_1, x_2 \rangle \cap M} p(x).$$

Pravděpodobnostní funkce

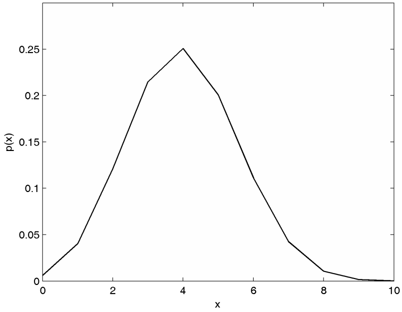
Pravděpodobnostní funkci $p(x)$ můžeme vyjádřit

- tabulkou,

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	$\sum$
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_i)$	$\dots$	1

Pravděpodobnostní funkce

- grafem $[x, p(x)]$,



Pravděpodobnostní funkce

- matematickým vzorcem, např.

$$p(x) = \begin{cases} \pi(1-\pi)^x & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde π je daná pravděpodobnost.

Příklad

Střelec má celkem 3 náboje a střílí na cíl až do prvního zásahu nebo dokud nevystřílí všechny náboje. Pravděpodobnost zásahu cíle při jednom výstřelu je 0,6. Náhodná veličina X představuje počet vystřelených nábojů. Popište tuto náhodnou veličinu pomocí pravděpodobnostní a distribuční funkce. Jaká je pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů nebude větší než 2?

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zašažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zásáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zašažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zásáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zašažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zásáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, která může nabývat pouze hodnot 1, 2 nebo 3. Obor hodnot této náhodné veličiny je tedy $M = \{1, 2, 3\}$. Určíme nyní hodnoty pravděpodobnostní funkce:

- $p(1) = P(X = 1) = 0{,}6$,
- $p(2) = P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$,
- $p(3) = P(X = 3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 1 odpovídá tomu, že cíl je zašažen při 1. výstřelu, hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě 2 odpovídá možnosti, že 1. výstřel je mimo, 2. výstřel zásáhne cíl, hodnota v bodě 3 (byly použity všechny 3 náboje) odpovídá tomu, že cíl byl buď zasažen až 3. výstřelem, nebo nebyl zasažen vůbec.

Příklad

Výsledky shrneme do tabulky.

x	1	2	3	$\sum$
$p(x)$	0,6	0,24	0,16	1

Pravděpodobnostní funkci můžeme pomocí vzorce vyjádřit

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{x-1} & x = 1, 2, \\ 0{,}4^2 & x = 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0$,
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6$,
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84$,
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$,
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1$.

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0,$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84,$
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1,$
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1.$

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

- $F(0) = P(X \leq 0) = 0,$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84,$
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1,$
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1.$

Příklad

Určíme nyní některé hodnoty funkce $F(x)$:

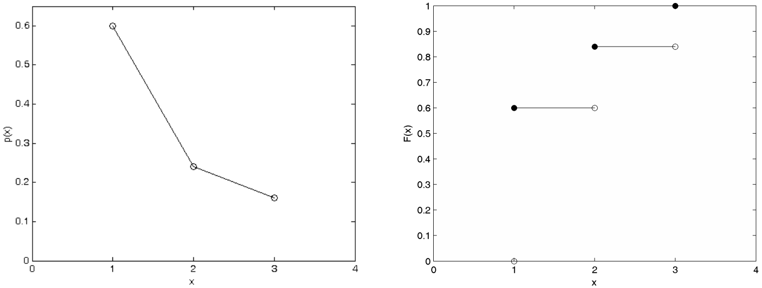
- $F(0) = P(X \leq 0) = 0,$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = p(1) = 0{,}6,$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(1) + p(2) = 0{,}84,$
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 1,$
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) = 1.$

Příklad

Tyto výsledky můžeme shrnout do vzorce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 0{,}6 & 1 \leq x < 2, \\ 0{,}84 & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

Příklad



Obrázek: Pravděpodobnostní a distribuční funkce

Příklad

Vypočítáme nyní pravděpodobnost, že počet vystřelených nábojů nebude větší než 2.

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = p(1) + p(2) = F(2) = \\ = 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}84.$$

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Vedle distribuční funkce je pro popis spojité náhodné veličiny používána funkce hustoty pravděpobnosti.

Definice

Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X je nezáporná funkce $f(x)$ taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}.$$

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Funkce $f(x)$ má tyto vlastnosti:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_M f(x)dx = 1,$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, kde derivace existuje,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) =$
  $= P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Funkce $f(x)$ má tyto vlastnosti:

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1,$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, kde derivace existuje,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) =$
  $= P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Funkce $f(x)$ má tyto vlastnosti:

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1,$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, kde derivace existuje,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) =$
  $= P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Funkce $f(x)$ má tyto vlastnosti:

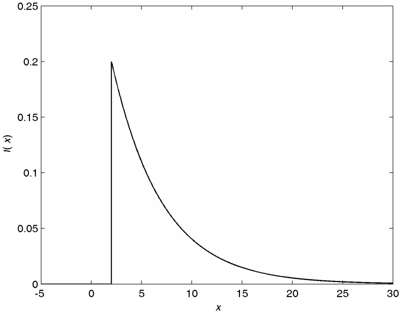
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{M} f(x)dx = 1,$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, kde derivace existuje,
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) =$
  $= P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Odtud plyne, že pro spojitou náhodnou veličinu je vždy $P(X = x) = 0$.

Funkce hustoty pravděpodobnosti

Funkci $f(x)$ můžeme vyjádřit vzorcem a grafem, např.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x-2}{5}} & \text{pro } x > 2, \\ 0 & \text{pro } x \leq 2. \end{cases}$$



Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty pravděpodobnosti. Stanovte příslušnou distribuční funkci. Určete pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$.

Příklad

Pro funkci hustoty musí platit, že $\int\limits_M f(x)dx = 1$. Určíme tedy integrál

$$\int\limits_0^1 cx^2(1-x)dx = c\int\limits_0^1 (x^2 - x^3)dx = c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= c\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{c}{12} = 1,$$

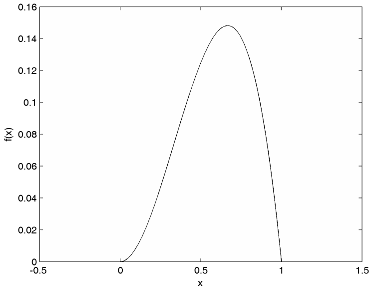
odkud dostáváme $c = 12$.

Příklad

Distribuční funkci určíme pomocí vztahu v definici hustoty pravděpodobnosti Pro $0 < x < 1$ platí

$$F(x) = \int_0^x 12t^2(1-t)dt = 12\int_0^x (t^2 - t^3)dt = 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x = \\ = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] = 4x^3 - 3x^4.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^3(4-3x) & 0 < x < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek: Funkce hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce

Příklad

Nejprve určíme pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$ pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = \int_{0{,}2}^{0{,}8} 12x^2(1-x)dx = \left[4x^3 - 3x^4\right]_{0{,}2}^{0{,}8} = 0{,}792.$$

Známe-li distribuční funkci, je výpočet snadnější

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = F(0{,}8) - F(0{,}2) = \\ = 0{,}8^3(4 - 3\cdot 0{,}8) - 0{,}2^3(4 - 3\cdot 0{,}2) = 0{,}792.$$

Příklad

Nejprve určíme pravděpodobnost $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$ pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti

$$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = \int_{0{,}2}^{0{,}8} 12x^2(1-x)dx = \left[4x^3 - 3x^4\right]_{0{,}2}^{0{,}8} = 0{,}792.$$

Známe-li distribuční funkci, je výpočet snadnější

$$\begin{aligned} P(0{,}2 < X < 0{,}8) &= F(0{,}8) - F(0{,}2) = \\ &= 0{,}8^3(4 - 3\cdot 0{,}8) - 0{,}2^3(4 - 3\cdot 0{,}2) = 0{,}792. \end{aligned}$$

Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení popsané distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Určete funkci hustoty pravděpodobnosti.

Příklad

Pro funkci hustoty pravděpodobnosti platí $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Pomocí derivací dostáváme $\left(\frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = e^{-x}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Charakteristiky polohy

Distribuční funkce (resp. pravděpodobnostní funkce nebo funkce hustoty pravděpodobnosti) podává o náhodné veličině úplnou informaci. Známe-li tuto funkci, víme, jakých hodnot může tato náhodná veličina nabývat a jaké jsou pravděpodobnosti odpovídající těmto hodnotám. V praxi je užitečné znát nějaké koncentovanější a přehlednější vyjádření této informace. K takovému popisu je používají číselné hodnoty označované jako číselné charakteristiky. Budeme mluvit o charakteristikách polohy, variability a koncentrace.

Nejdůležitějšími charakteristikami polohy jsou střední hodnota, kvantily (medián, horní a dolní kvartil, . . .) a modus.

Střední hodnota

Definice

Střední hodnota $E(X)$ náhodné veličiny X (někdy označována jako μ) určuje hodnotu, kolem níž náhodná veličina kolísá. V případě diskrétní náhodné veličiny je definována vztahem

$$E(X) = \sum_{x \in M} x p(x),$$

pro spojitou náhodnou veličinu vztahem

$$E(X) = \int_M x f(x) dx$$

za předpokladu, že uvedená řada resp. integrál konverguje absolutně.

Střední hodnota

Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

- střední hodnota konstanty k je rovna této konstantě

$$E(k) = k,$$

- střední hodnota součinu konstanty k a náhodné veličiny X je rovna součinu konstanty k a střední hodnoty náhodné veličiny X

$$E(kX) = kE(X),$$

Střední hodnota

Uvedeme nyní stručně některé vlastnosti střední hodnoty:

- střední hodnota konstanty k je rovna této konstantě

$$E(k) = k,$$

- střední hodnota součinu konstanty k a náhodné veličiny X je rovna součinu konstanty k a střední hodnoty náhodné veličiny X

$$E(kX) = kE(X),$$

Střední hodnota

- střední hodnota součtu náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je rovna součtu středních hodnot těchto veličin,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n),$$

- jsou-li náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezávislé, pak střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jejich středních hodnot

$$E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n).$$

Střední hodnota

- střední hodnota součtu náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je rovna součtu středních hodnot těchto veličin,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n),$$

- jsou-li náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezávislé, pak střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jejich středních hodnot

$$E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)E(X_2) \ldots E(X_n).$$

Poznámka k nezávislosti náhodných veličin

Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = \\ = P(X_1 \leq x_1) \cdot P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n).$$

Mějme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, jehož složky $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny. Nechť
$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$ je **sdružená distribuční funkce** a $F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_n)$ jsou distribuční funkce náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n).$$

Poznámka k nezávislosti náhodných veličin

Je-li $\mathbf{X}$ náhodný vektor, jehož složky jsou diskrétní náhodné veličiny, funkce $p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ je **sdružená pravděpodobnostní funkce** a $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$ jsou pravděpodobnostní funkce náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$, pak platí: Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1) \cdot p(x_2) \cdots p(x_n).$$

Je-li $\mathbf{X}$ náhodný vektor, jehož složky jsou spojité náhodné veličiny, funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je **sdružená funkce hustoty pravděpodobnosti** a $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ jsou funkce hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$, pak platí: Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n).$$

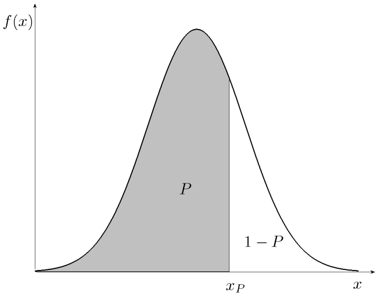
Kvantil

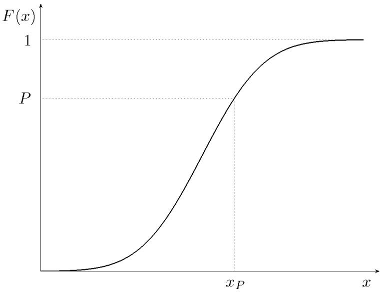
Definice

100P% kvantil x_P náhodné veličiny s rostoucí distribuční funkcí je taková hodnota náhodné veličiny, pro kterou platí

$$P(X \leq x_P) = F(x_P) = P, \quad 0 < P < 1.$$

Kvantil





Kvantil $x_{0,50}$ se nazývá **medián** $Me(X)$, platí tedy $P(X \leq Me(X)) = P(X \geq Me(X)) = 0{,}50$. Kvantil $x_{0,25}$ se nazývá dolní kvartil, kvantil $x_{0,75}$ je horní kvartil. Vybrané kvantily důležitých rozdělení jsou tabelovány.

Modus

Definice

Modus $Mo(X)$ je hodnota náhodné veličiny s největší pravděpodobností (pro diskrétní náh. veličinu), resp. hodnota, ve které má funkce $f(x)$ maximum (pro spojitou náh. veličinu).

Příklad

Určete střední hodnotu a modus náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{x-1} & x = 1, 2, \\ 0{,}4^2 & x = 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^0 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^1 + 3 \cdot 0{,}4^2 = 1{,}56.$$

Modus určuje hodnotu náhodné veličiny s největší pravděpodobností, což je v našem případě $Mo(X) = 1$, neboť hodnota pravděpodobnostní funkce je $p(1) = 0{,}6$.

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^0 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^1 + 3 \cdot 0{,}4^2 = 1{,}56.$$

Modus určuje hodnotu náhodné veličiny s největší pravděpodobností, což je v našem případě $Mo(X) = 1$, neboť hodnota pravděpodobnostní funkce je $p(1) = 0{,}6$.

Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a modus této náhodné veličiny.

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 12x^2(1-x) = 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Modus u spojité náhodné veličiny určuje maximum funkce hustoty pravděpodobnosti. Budeme hledat maximum funkce $f(x)$ na intervalu $0 < x < 1$, $\frac{d}{dx}\left[12x^2(1-x)\right] = 12(2x - 3x^2) = 0$, odkud $x(2-3x) = 0$, tedy $x = 0$ nebo $x = 2/3$. Funkce hustoty pravděpodobnosti nabývá svého maxima v bodě $x = 2/3$, proto má modus hodnotu $Mo(X) = 2/3$.

Příklad

Střední hodnotu určíme z definičního vztahu

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 12x^2(1-x) = 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Modus u spojité náhodné veličiny určuje maximum funkce hustoty pravděpodobnosti. Budeme hledat maximum funkce $f(x)$ na intervalu $0 < x < 1$, $\frac{d}{dx}\left[12x^2(1-x)\right] = 12(2x - 3x^2) = 0$, odkud $x(2-3x) = 0$, tedy $x = 0$ nebo $x = 2/3$. Funkce hustoty pravděpodobnosti nabývá svého maxima v bodě $x = 2/3$, proto má modus hodnotu $Mo(X) = 2/3$.

Příklad

Určete medián, horní a dolní kvartil náhodné veličiny X s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3} & x > 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

Příklad

Pro kvantil náhodné veličiny platí $F(x_P) = P$. V našem případě

$$1 - \frac{1}{x_P^3} = P,$$

odkud dostáváme

$$x_P = \frac{1}{\sqrt[3]{1-P}}.$$

Dosazováním do daného vzorce získáme kvantily:

medián	$x_{0,50} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0,50}}$	$= 1,260,$
dolní kvartil	$x_{0,25} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0,25}}$	$= 1,101,$
horní kvartil	$x_{0,75} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0,75}}$	$= 1,587.$

Příklad

Pro kvantil náhodné veličiny platí $F(x_P) = P$. V našem případě

$$1 - \frac{1}{x_P^3} = P,$$

odkud dostáváme

$$x_P = \frac{1}{\sqrt[3]{1-P}}.$$

Dosazováním do daného vzorce získáme kvantily:

medián	$x_{0,50} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}50}}$	$= 1{,}260,$
dolní kvartil	$x_{0,25} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}25}}$	$= 1{,}101,$
horní kvartil	$x_{0,75} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-0{,}75}}$	$= 1{,}587.$

Charakteristiky variability

Základní a nejpoužívanější charakteristiky variability je rozptyl a směrodatná odchylka.

Charakteristiky variability

Definice

Rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X (někdy označovaný jako σ^2) je obecně definován vztahem

$$D(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}.$$

V případě disktrétní náhodné veličiny určíme rozptyl ze vztahu

$$D(X) = \sum_{x \in M} [x - E(X)]^2 p(x),$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$D(X) = \int_M [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

Rozptyl

Vlastnosti rozptylu:

- $D(k) = 0$, kde k je libovolná konstanta,
- $D(kX) = k^2 D(X)$,
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé,
- $D(X) \geq 0$ pro každou náhodnou veličinu,

Rozptyl

Vlastnosti rozptylu:

- $D(k) = 0$, kde k je libovolná konstanta,
- $D(kX) = k^2 D(X)$,
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé,
- $D(X) \geq 0$ pro každou náhodnou veličinu,

Rozptyl

Vlastnosti rozptylu:

- $D(k) = 0$, kde k je libovolná konstanta,
- $D(kX) = k^2 D(X)$,
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé,
- $D(X) \geq 0$ pro každou náhodnou veličinu,

Rozptyl

Vlastnosti rozptylu:

- $D(k) = 0$, kde k je libovolná konstanta,
- $D(kX) = k^2 D(X)$,
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, jsou-li X a Y nezávislé,
- $D(X) \geq 0$ pro každou náhodnou veličinu,

Rozptyl

- $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, což je tzv. výpočetní tvar rozptylu.

$$\begin{aligned} D(X) &= E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] = \\ &= E(X^2) - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Výpočetní tvar rozptylu pro diskrétní náhodnou veličinu je

$$D(X) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) - E(X)^2,$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$D(X) = \int_M x^2 f(x) dx - E(X)^2.$$

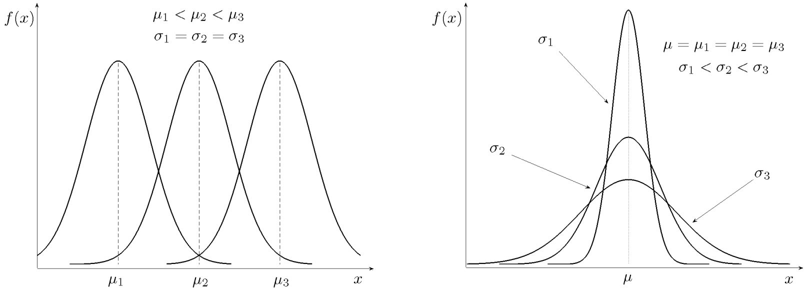
Směrodatná odchylka

Definice

Směrodatná odchylka $\sigma(X)$ náhodné veličiny X je definována jako odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Směrodatná odchylka je vyjádřena je stejných jednotkách jako náhodná veličina X.



Obrázek: Vzájemný vztah mezi střední hodnotou a rozptylem

Příklad

Určete rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech

Příklad

Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom

$$D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566.$$

Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Příklad

Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom

$$D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566.$$

Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Příklad

Střední hodnotu této náhodné veličiny jsme spočítali, má hodnotu $E(X) = 1{,}56$. Pro výpočet rozptylu použije výpočetní tvar $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, musíme určit hodnotu

$$E(X^2) = \sum_{x \in M} x^2 p(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}16 = 3,$$

potom

$$D(X) = 3 - 1{,}56^2 = 0{,}566.$$

Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Příklad

Určete rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X posanou funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny byla určena dříve, má hodnotu $E(X) = 3/5$. Podobně jako v předcházející příkladě použijeme výpočetní tvar rozptylu $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, tedy

$$E(X^2) = \int_M x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x)dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

potom

$$D(X) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Směrodatná odchylka je rovna

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny byla určena dříve, má hodnotu $E(X) = 3/5$. Podobně jako v předcházející příkladě použijeme výpočetní tvar rozptylu $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, tedy

$$E(X^2) = \int_M x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x)dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

potom

$$D(X) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Směrodatná odchylka je rovna

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Charakteristiky koncentrace

Nyní se budeme zabývat charakteristikami popisujími tvar rozdělení, především symetrii a špičatost. Tyto charakteristiky jsou definovány pomocí momentů.

Charakteristiky koncentrace

Definice

Obecný moment r-tého stupně μ'_r náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\mu'_r(X) = E(X^r) \quad \text{pro } r = 1, 2, \ldots .$$

V případě disktrétní náhodné veličiny jej určíme ze vztahu

$$\mu'_r(X) = \sum_M x_i^r p(x_i),$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$\mu'_r(X) = \int_M x^r f(x) dx.$$

Charakteristiky koncentrace

Definice

Centrální moment r-tého stupně μ_r náhodné veličiny X je definován vztahem

$$\mu_r(X) = E[X - E(X)]^r \quad \text{pro } r = 2, 3, \ldots .$$

V případě disktrétní náhodné veličiny jej určíme ze vztahu

$$\mu_r(X) = \sum_M [x_i - E(X)]^r p(x_i),$$

pro spojitou náhodnou veličinu

$$\mu_r(X) = \int_M [x - E(X)]^r f(x) dx.$$

Koeficient šikmosti

Definice

Koeficient šikmosti $\alpha_3(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma(X)^3}.$$

Podle hodnot koeficientu šikmosti můžeme poznat, zda je rozdělení symetrické nebo je zešikmené. Je-li

- $\alpha_3 = 0$, je rozdělení symetrické,
- $\alpha_3 < 0$, je rozdělení zešikmené doprava,
- $\alpha_3 > 0$, je rozdělení zešikmené doleva.

Koeficient šikmosti

Definice

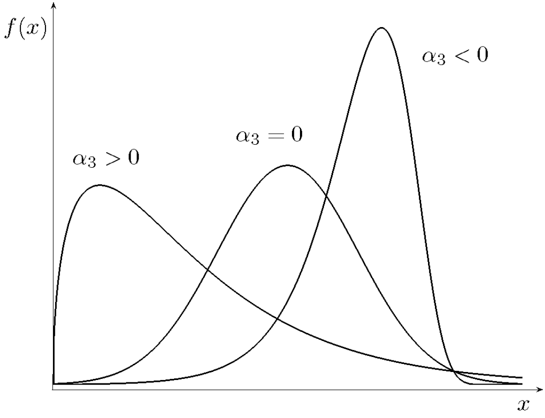
Koeficient šikmosti $\alpha_3(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma(X)^3}.$$

Podle hodnot koeficientu šikmosti můžeme poznat, zda je rozdělení symetrické nebo je zešikmené. Je-li

- $\alpha_3 = 0$, je rozdělení symetrické,
- $\alpha_3 < 0$, je rozdělení zešikmené doprava,
- $\alpha_3 > 0$, je rozdělení zešikmené doleva.

Koeficient šikmosti



Obrázek: Koeficient šikmosti

Koeficient špičatosti

Definice

Koeficient špičatosti $\alpha_4(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma(X)^4} - 3.$$

Podle hodnot koeficientu špičatosti můžeme poznat, zda je rozdělení ploché nebo špičaté. Je-li

- $\alpha_4 = 0$, je rozdělení stejně špičaté jako normální,
- $\alpha_4 < 0$, je rozdělení plošší než normální,
- $\alpha_4 > 0$, je rozdělení špičatější než normální.

Koeficient špičatosti

Definice

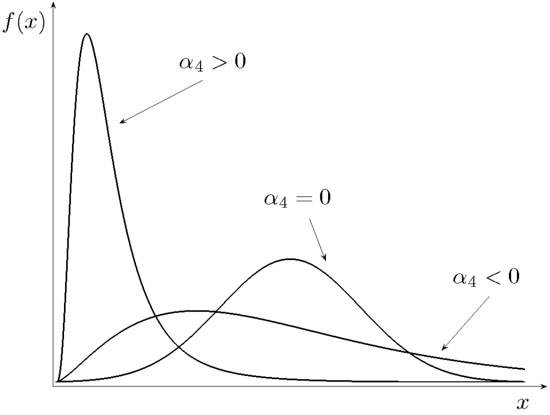
Koeficient špičatosti $\alpha_4(X)$ je definován vztahem

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma(X)^4} - 3.$$

Podle hodnot koeficientu špičatosti můžeme poznat, zda je rozdělení ploché nebo špičaté. Je-li

- $\alpha_4 = 0$, je rozdělení stejně špičaté jako normální,
- $\alpha_4 < 0$, je rozdělení plošší než normální,
- $\alpha_4 > 0$, je rozdělení špičatější než normální.

Koeficient špičatosti



Obrázek: Koeficient špičatosti

Příklad

Vypočitejte koeficient šikmosti a špičatosti náhodné veličiny udávající počet vystřelených nábojů při 3 výstřelech (viz předchozí příklady)

Příklad

K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3. a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3}[x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3}[x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756$$

Příklad

K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3. a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756$$

Příklad

K výpočtu koeficientu šikmosti a špičatosti je třeba nejprve určit 3. a 4. centrální moment. Střední hodnotu této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 1{,}56$, směrodatná odchylka je $\sigma(X) = 0{,}753$.

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^3 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^3 \cdot 0{,}16 = 0{,}393$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{3} [x_i - E(X)]^4 p(x_i) = (1 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}6 + \\ +(2 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}24 + (3 - 1{,}56)^4 \cdot 0{,}16 = 0{,}756$$

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0{,}922,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -0{,}644.$$

Můžeme tedy říct, že rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doleva) a je plošší než normální rozdělení.

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0{,}922,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -0{,}644.$$

Můžeme tedy říct, že rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doleva) a je plošší než normální rozdělení.

Příklad

Určete koeficient šikmosti a špičatosti náhodné veličiny X s funkcí hustoty pravděpodobnosti (viz předchozí příklady)

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna $1/5$. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna $1/5$. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Příklad

Střední hodnota této náhodné veličiny má hodnotu $E(X) = 3/5$. Směrodatná odchylku je rovna $1/5$. Určíme nejprve potřebné centrální momenty.

$$\mu_3 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^3 12x^2(1-x)dx = \cdots = -\frac{2}{875} = -0{,}00229,$$

$$\mu_4 = \int_0^1 [x - 0{,}6]^4 12x^2(1-x)dx = \cdots = \frac{33}{8750} = 0{,}00377.$$

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{2}{7} = -0{,}286,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{9}{14} = -0{,}643.$$

Rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doprava) a je plošší než normální rozdělení.

Příklad

Koeficient šikmosti je potom roven

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{2}{7} = -0{,}286,$$

Koeficient špičatosti

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{9}{14} = -0{,}643.$$

Rozdělení náhodné veličiny je zešikmeno (doprava) a je plošší než normální rozdělení.