Podmíněná pravděpodobnost

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie, FVL, UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

Podmíněná pravděpodobnost

Definice

Podmíněná pravděpodobnost $P(A/B)$ – pravděpodobnost nastoupení jevu A za předpokladu, že nastal jev B $(P(B) > 0)$ definujeme vztahem

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Pravidlo o násobení pravděpodobností

Z předchozí definice vyjádříme

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A).$$

Rozšířením na s jevů dostáváme

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_s/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{s-1}).$$

Pro 3 jevy platí

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Pravidlo o násobení pravděpodobností

Z předchozí definice vyjádříme

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A).$$

Rozšířením na s jevů dostáváme

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_s/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{s-1}).$$

Pro 3 jevy platí

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Pravidlo o násobení pravděpodobností

Z předchozí definice vyjádříme

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A).$$

Rozšířením na s jevů dostáváme

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_s/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{s-1}).$$

Pro 3 jevy platí

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Nezávislé jevy

Jestliže $P(A/B) = P(A)$, říkáme, že jev A je **nezávislý** na jevu B. Nezávislost dvou jevů je oboustranná. Je-li jev A nezávislý na jevu B, pak také jev B je nezávislý na jevu A, tedy $P(B/A) = P(B)$.

Jsou-li jevy A a B nezávislé, pak

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Daný vztah je nutnou i postačující podmínkou nezávislosti.

Nezávislé jevy

Mějme množinu náhodných jevů $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. U této množiny jevů rozlišujeme nezávislost **podvojnou** (tj. nezávislost každé dvojice jevů) a nezávislost **vzájemnou**. Jevy nazýváme **vzájemně nezávislé** (dále jen nezávislé), právě když pro libovolnou podmnožinu $\{A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ir}\}$ množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jevů, $2 \leq r \leq n$, platí

$$P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ir}) = P(A_{i1}) \cdots P(A_{ir}).$$

Tento vztah musí platit pro všechny dvojice, trojice, atd. až n-tice náhodných jevů $A_1, \ldots, A_n$.
Pro skupinu nezávislých jevů pak platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_s).$$

Nezávislé jevy

Mějme množinu náhodných jevů $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. U této množiny jevů rozlišujeme nezávislost **podvojnou** (tj. nezávislost každé dvojice jevů) a nezávislost **vzájemnou**. Jevy nazýváme **vzájemně nezávislé** (dále jen nezávislé), právě když pro libovolnou podmnožinu $\{A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ir}\}$ množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jevů, $2 \leq r \leq n$, platí

$$P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ir}) = P(A_{i1}) \cdots P(A_{ir}).$$

Tento vztah musí platit pro všechny dvojice, trojice, atd. až n-tice náhodných jevů $A_1, \ldots, A_n$.
Pro skupinu nezávislých jevů pak platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_s).$$

Pravidlo o sčítání pravděpodobností

Pravděpodobnost sjednocení dvou libovolných jevů se rovná součtu pravděpodobností těchto jevů zmenšenému o pravděpodobnost jejich průniku.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pro s libovolných jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$ má pravidlo tvar

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i) - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^{s} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \sum_{k=j+1}^{s} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{s-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{s} A_i\right).$$

Pravidlo o sčítání pravděpodobností

Pravděpodobnost sjednocení dvou libovolných jevů se rovná součtu pravděpodobností těchto jevů zmenšenému o pravděpodobnost jejich průniku.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pro s libovolných jevů $A_1, A_2, \ldots, A_s$ má pravidlo tvar

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s) = & \sum_{i=1}^{s} P(A_i) - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^{s} P(A_i \cap A_j) + \\ & + \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=i+1}^{s-1} \sum_{k=j+1}^{s} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + \\ & + (-1)^{s-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{s} A_i \right). \end{aligned}$$

Pravidlo o sčítání pravděpodobností

Pro 3 jevy A, B a C má pravidlo tvar

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ & + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Pravidlo o sčítání pravděpodobností

Jsou-li jevy A, B neslučitelné, potom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

To je možné zobecnit i na libovolný počet neslučitelných jevů

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_s).$$

Pravidlo o sčítání pravděpodobností

Jsou-li jevy A, B neslučitelné, potom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

To je možné zobecnit i na libovolný počet neslučitelných jevů

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_s).$$

Příklad 1

O daném návrhu nezávisle na sobě hlasují 3 osoby označené A, B a C. Osoba A nebude souhlasit s návrhem s pravděpodobností 0,7, osoba B nebude souhlasit s pravděpodobností 0,5 a osoba C s pravděpodobností 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že návrh bude zamítnut, jestliže k zamítnutí stačí, aby alespoň jedna osoba nesouhlasila s návrhem?

Příklad 1

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ & + P(A \cap B \cap C) = \\ = & 0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}3 - \\ & - 0{,}7 \cdot 0{,}5 - 0{,}7 \cdot 0{,}3 - 0{,}5 \cdot 0{,}3 + \\ & + 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}895 \end{aligned}$$

nebo

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}895$$

Příklad 1

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C) = {} & P(A)+P(B)+P(C)- \\ & -P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+ \\ & +P(A\cap B\cap C) = \\ = {} & 0{,}7+0{,}5+0{,}3- \\ & -0{,}7\cdot 0{,}5-0{,}7\cdot 0{,}3-0{,}5\cdot 0{,}3+ \\ & +0{,}7\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}895\end{aligned}$$

nebo

$$P(A\cup B\cup C) = 1-P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) =$$

$$= 1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = 1-0{,}3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}895$$

Příklad 2

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly 2 pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

- jev A . . . padnou 2 pětky
- jev B . . . součet je dělitelný 5
  (1+4, 4+1, 2+3, 3+2, 4+6, 6+4, 5+5)

Příklad 2

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly 2 pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

- jev A ... padnou 2 pětky
- jev B ... součet je dělitelný 5
  (1+4, 4+1, 2+3, 3+2, 4+6, 6+4, 5+5)

Příklad 2

- $$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$
- $$P(B) = \frac{7}{36}$$
- $$P(A/B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{1}{7}$$

Příklad 2

- $$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$
- $$P(B) = \frac{7}{36}$$
- $$P(A/B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{1}{7}$$

Příklad 2

- $$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$
- $$P(B) = \frac{7}{36}$$
- $$P(A/B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{1}{7}$$

Příklad 3

Z úplné sady 32 karet náhodně vybereme 1 kartu. Značí-li jev A, že vytažená karta je zelená, jev B že vytažená karta je eso, určete pravděpodobnost jevů A, B, $A \cap B$, $A \cup B$. Jsou oba jevy nezávislé?

- $$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$
- $$P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Příklad 3

Z úplné sady 32 karet náhodně vybereme 1 kartu. Značí-li jev A, že vytažená karta je zelená, jev B že vytažená karta je eso, určete pravděpodobnost jevů A, B, $A \cap B$, $A \cup B$. Jsou oba jevy nezávislé?

- $$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$
- $$P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Příklad 3

- $$P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$
- $$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$$

  Jevy A a B jsou nezávislé.

Příklad 3

- $$P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$
- $$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$$

  Jevy A a B jsou nezávislé.

Příklad 3

- $$P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$
- $$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$$

  Jevy A a B jsou nezávislé.

Příklad 4

První dělník vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10 % zmetků. Druhý dělník vyrobí denně 40 výrobků, z toho 5 % zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je zmetek a pochází od prvního resp. druhého dělníka?

Příklad 4

- jev A_1 ... výrobek pochází od 1. dělníka

$$P(A_1) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

- jev A_2 ... výrobek pochází od 2. dělníka

$$P(A_2) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

- jev B ... výrobek je zmetek

$$P(B) = \frac{6+2}{100} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Příklad 4

- jev A_1 ... výrobek pochází od 1. dělníka

$$P(A_1) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

- jev A_2 ... výrobek pochází od 2. dělníka

$$P(A_2) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

- jev B ... výrobek je zmetek

$$P(B) = \frac{6+2}{100} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Příklad 4

- jev A_1 . . . výrobek pochází od 1. dělníka

$$P(A_1) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

- jev A_2 . . . výrobek pochází od 2. dělníka

$$P(A_2) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

- jev B . . . výrobek je zmetek

$$P(B) = \frac{6+2}{100} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Příklad 4

- Výrobek je zmetek a pochází od 1. dělníka

$$P(A_1 \cap B) = ?$$

- Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 1. dělníka

$$P(B/A_1) = 0{,}1$$

-

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$$

Příklad 4

- Výrobek je zmetek a pochází od 1. dělníka

$$P(A_1 \cap B) = ?$$

- Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 1. dělníka

$$P(B/A_1) = 0{,}1$$

- $$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$$

Příklad 4

- Výrobek je zmetek a pochází od 1. dělníka

$$P(A_1 \cap B) = ?$$

- Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 1. dělníka

$$P(B/A_1) = 0{,}1$$

- $$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$$

Příklad 4

- Výrobek je zmetek a pochází od 2. dělníka

$$P(A_2 \cap B) =?$$

- Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 2. dělníka

$$P(B/A_2) = 0{,}05$$

- $$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$$

Příklad 4

- Výrobek je zmetek a pochází od 2. dělníka

$$P(A_2 \cap B) = ?$$

- Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 2. dělníka

$$P(B/A_2) = 0{,}05$$

-

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$$

Příklad 4

- Výrobek je zmetek a pochází od 2. dělníka

$$P(A_2 \cap B) = ?$$

- Výrobek je zmetek, za podmínky, že je od 2. dělníka

$$P(B/A_2) = 0{,}05$$

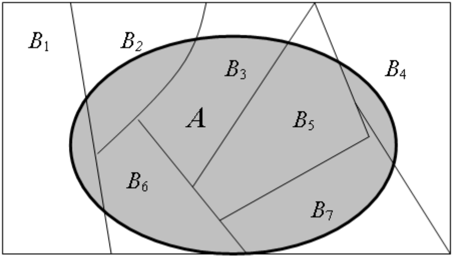
- $$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$$

Formule úplné pravděpodobnosti

Chceme určit pravděpodobnost jevu A, když známe pravděpodobnosti $P(A/B_i)$ a pravděpodobnosti $P(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ pro $B_1, B_2, \ldots, B_n$, které tvoří úplnou skupinu neslučitelných jevů. Pro ně platí

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1.$$

Formule úplné pravděpodobnosti



Pravděpodobnost jevu A je

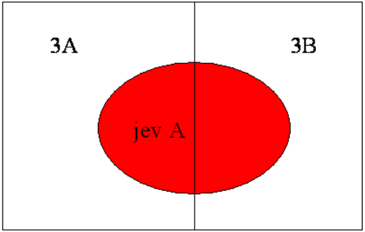
$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A/B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

Příklad 4

Na gymnáziu je v 3.A 13 chlapců a 16 děvčat, v 3.B je 14 chlapců a 12 děvčat. Náhodně vybereme v každé třídě po 1 studentovi a z těchto 2 opět náhodně vybereme jednoho. S jakou pravděpodobností to bude chlapec?

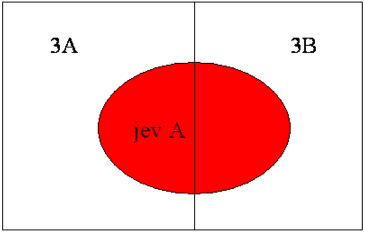
Příklad 4

- jev A ... je to chlapec
- jev B_1 ... je z 3.A
- jev B_2 ... je z 3.B



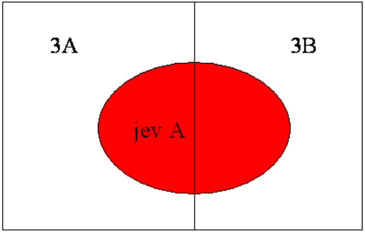
Příklad 4

- jev A . . . je to chlapec
- jev B_1 . . . je z 3.A
- jev B_2 . . . je z 3.B



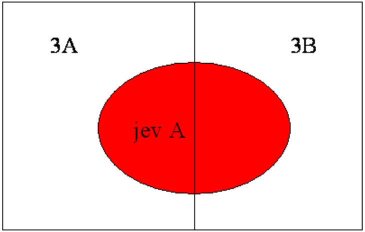
Příklad 4

- jev A . . . je to chlapec
- jev B_1 . . . je z 3.A
- jev B_2 . . . je z 3.B



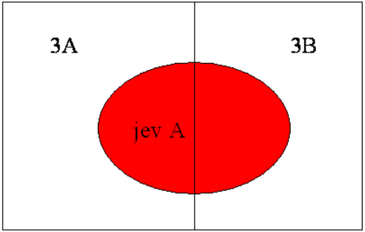
Příklad 4

- $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$
- $P(A/B_1) = \frac{13}{29}$
- $P(A/B_2) = \frac{14}{26}$



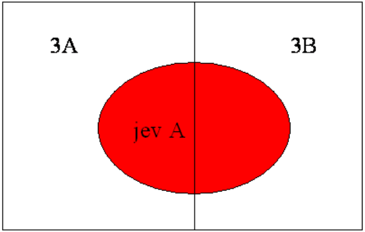
Příklad 4

- $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$
- $P(A/B_1) = \frac{13}{29}$
- $P(A/B_2) = \frac{14}{26}$



Příklad 4

- $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$
- $P(A/B_1) = \frac{13}{29}$
- $P(A/B_2) = \frac{14}{26}$



Příklad 4

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{29} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{26} = 0{,}493$$

Bayesův vzorec

Podmíněné pravděpodobnosti $P(B_i/A)$ lze vypočítat z **Bayesova vzorce**, který vyplývá z věty o násobení pravděpodobností a z formule úplné pravděpodobnosti:

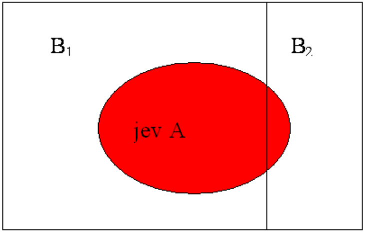
$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A/B_j)}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Příklad 5

Je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 95 %, kdežto u výrobku nestandardního s pravděpodobností 20 %. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u kterého zkouška proběhla kladně, je standardní?

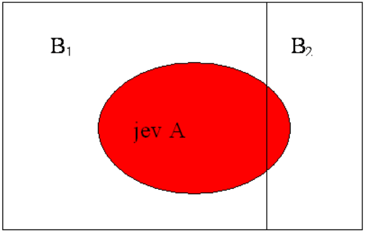
Příklad 5

- jev A ... zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 ... výrobek je standardní
- jev B_2 ... výrobek není standardní



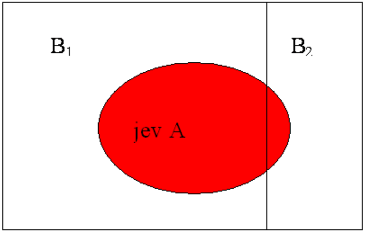
Příklad 5

- jev A . . . zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 . . . výrobek je standardní
- jev B_2 . . . výrobek není standardní



Příklad 5

- jev A ... zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 ... výrobek je standardní
- jev B_2 ... výrobek není standardní



Příklad 5

- jev A . . . zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 . . . výrobek je standardní
- jev B_2 . . . výrobek není standardní

- $P(B_1) = 0{,}9$
- $P(B_2) = 0{,}1$
- $P(A/B_1) = 0{,}95$
- $P(A/B_2) = 0{,}2$

Příklad 5

- jev A … zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 … výrobek je standardní
- jev B_2 … výrobek není standardní

- $P(B_1) = 0{,}9$
- $P(B_2) = 0{,}1$
- $P(A/B_1) = 0{,}95$
- $P(A/B_2) = 0{,}2$

Příklad 5

- jev A . . . zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 . . . výrobek je standardní
- jev B_2 . . . výrobek není standardní

- $P(B_1) = 0{,}9$
- $P(B_2) = 0{,}1$
- $P(A/B_1) = 0{,}95$
- $P(A/B_2) = 0{,}2$

Příklad 5

- jev A ... zkouška výrobku dopadla kladně
- jev B_1 ... výrobek je standardní
- jev B_2 ... výrobek není standardní

- $P(B_1) = 0{,}9$
- $P(B_2) = 0{,}1$
- $P(A/B_1) = 0{,}95$
- $P(A/B_2) = 0{,}2$

Příklad 5

Pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dala kladný výsledek, je standardní, je rovna

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)} = \\ = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}95}{0{,}9 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}2} = 0{,}977$$