Testování hypotéz – testy o tvaru rozdělení

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie, FVL, UO Brno
kancelář 69a, tel. 973 442029
email:Jiri.Neubauer@unob.cz

Testování hypotéz

Statistickou hypotézou se rozumí určité tvrzení

- o parametrech rozdělení zkoumané náhodné veličiny (μ, σ^2, π, λ, $\ldots$),
- o tvaru rozdělení (normální, Poissonovo, $\ldots$).

Testování hypotéz

Statistickou hypotézou se rozumí určité tvrzení

- o parametrech rozdělení zkoumané náhodné veličiny (μ, σ^2, π, λ, $\ldots$),
- o tvaru rozdělení (normální, Poissonovo, $\ldots$).

Testování hypotéz

Předpokládáme-li např., že střední hodnota základního souboru μ se rovná určité konkrétní hodnotě μ_0, vyslovili jsme hypotézu o parametru základního souboru. Na základě vyčerpávajícího šetření celého základního souboru by bylo možné bezpečně rozhodnout o správnosti či nesprávnosti hypotézy. Takové vyčerpávající šetření je většinou neekonomické nebo technicky neproveditelné, proto podrobíme šetření jen určitou část základního souboru – **výběrový soubor**. Ten použijeme pro rozhodnutí o správnosti vyslovené hypotézy.

Testování hypotéz

Při testování hypotéz formulujeme dvojici tvrzení

- H ... předpoklad, který vyslovíme o určitém parametru či tvaru rozdělení základního souboru, nazývá se **nulová hypotéza**, např. hypotéza o konkrétní střední hodnotě zapíšeme
  - $H: \mu = \mu_0$,
- A ... tvrzení, které popírá vlastnost vyslovenou v nulové hypotéze, nazývá se **alternativní hypotéza**
  1. $A: \mu \neq \mu_0 \rightarrow$ oboustranný test,
  2. $A: \mu > \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test,
  3. $A: \mu < \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test.

Testování hypotéz

Při testování hypotéz formulujeme dvojici tvrzení

- H . . . předpoklad, který vyslovíme o určitém parametru či tvaru rozdělení základního souboru, nazývá se **nulová hypotéza**, např. hypotéza o konkrétní střední hodnotě zapíšeme
  - $H : \mu = \mu_0$,
- A . . . tvrzení, které popírá vlastnost vyslovenou v nulové hypotéze, nazývá se **alternativní hypotéza**
  1. $A : \mu \neq \mu_0 \rightarrow$ oboustranný test,
  2. $A : \mu > \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test,
  3. $A : \mu < \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test.

Testování hypotéz

Při testování hypotéz formulujeme dvojici tvrzení

- H ... předpoklad, který vyslovíme o určitém parametru či tvaru rozdělení základního souboru, nazývá se **nulová hypotéza**, např. hypotéza o konkrétní střední hodnotě zapíšeme
  - $H : \mu = \mu_0$,
- A ... tvrzení, které popírá vlastnost vyslovenou v nulové hypotéze, nazývá se **alternativní hypotéza**
  1. $A : \mu \neq \mu_0 \rightarrow$ oboustranný test,
  2. $A : \mu > \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test,
  3. $A : \mu < \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test.

Testování hypotéz

Při testování hypotéz formulujeme dvojici tvrzení

- H ... předpoklad, který vyslovíme o určitém parametru či tvaru rozdělení základního souboru, nazývá se **nulová hypotéza**, např. hypotéza o konkrétní střední hodnotě zapíšeme
  - $H : \mu = \mu_0$,
- A ... tvrzení, které popírá vlastnost vyslovenou v nulové hypotéze, nazývá se **alternativní hypotéza**
  1. $A : \mu \neq \mu_0 \rightarrow$ oboustranný test,
  2. $A : \mu > \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test,
  3. $A : \mu < \mu_0 \rightarrow$ jednostranný test.

Testování hypotéz

Při testování hypotéz se můžeme dopustit chybných závěrů, neboť úsudky jsou prováděny pomocí náhodného výběru.

skutečnost	**H je pravdivá**		**H je nepravdivá**	
úsudek o H		prst.		prst.
se nezamítá	správné rozhodnutí	$1-\alpha$	chyba II. druhu	β
se zamítá	chyba I. druhu	α	správné rozhodnutí	$1-\beta$

Testování hypotéz

- Zamítneme-li nulovou hypotézu, přestože je ve skutečnosti pravdivá, dopouštíme se **chyby I. druhu**. Maximální pravděpodobnost chyby I. druhu označujeme α ... **hladina významnosti**. Číslo $1 - \alpha$ vyjadřuje minimální pravděpodobnost, s jakou nezamítneme správnou hypotézu.
- Přijmeme-li naopak nulovou hypotézu, přestože je ve skutečnosti nesprávná, dopouštíme se **chyby II. druhu**. Maximální pravděpodobnost chyby II. druhu označujeme β. Číslo $1 - \beta$ ... **síla testu** vyjadřuje minimální pravděpodobnost, s jakou zamítneme nulovou hypotézu H, platí-li ve skutečnosti alternativní hypotéza A.

Testování hypotéz

- Zamítneme-li nulovou hypotézu, přestože je ve skutečnosti pravdivá, dopouštíme se **chyby I. druhu**. Maximální pravděpodobnost chyby I. druhu označujeme α ... **hladina významnosti**. Číslo $1-\alpha$ vyjadřuje minimální pravděpodobnost, s jakou nezamítneme správnou hypotézu.
- Přijmeme-li naopak nulovou hypotézu, přestože je ve skutečnosti nesprávná, dopouštíme se **chyby II. druhu**. Maximální pravděpodobnost chyby II. druhu označujeme β. Číslo $1-\beta$ ... **síla testu** vyjadřuje minimální pravděpodobnost, s jakou zamítneme nulovou hypotézu H, platí-li ve skutečnosti alternativní hypotéza A.

Testování hypotéz

K testu hypotézy použijeme vhodnou statistiku $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tzv. testové kriterium, která má při platnosti hypotézy H známé pravděpodobnostní rozdělení (zpravidla t, u, χ^2, F). Prostor hodnot této statistiky se rozdělí na 2 disjunktní obory:

- $W_{1-\alpha}$ - **obor přijetí hypotézy** H – množina těch hodnot, které svědčí ve prospěch hypotézy H,
- W_α - **kritický obor** (obor zamítnutí hypotézy H) - obsahuje svědčící ve prospěch hypotézy A.

Např. pro test hypotézy o střední hodnotě μ normálního rozdělení $H : \mu = \mu_0 \to A : \mu > \mu_0$ bude kritický obor $W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$, kde μ_0 je předpokládaná hodnota parametru μ, t je hodnota testového kriteria a $t_{1-\alpha}(\nu)$ je kvantil Studentova rozdělení – tzv. **kritická hodnota**.

Testování hypotéz

K testu hypotézy použijeme vhodnou statistiku $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tzv. testové kriterium, která má při platnosti hypotézy H známé pravděpodobnostní rozdělení (zpravidla t, u, χ^2, F). Prostor hodnot této statistiky se rozdělí na 2 disjunktní obory:

- $W_{1-\alpha}$ - **obor přijetí hypotézy** H – množina těch hodnot, které svědčí ve prospěch hypotézy H,
- W_α - **kritický obor** (obor zamítnutí hypotézy H) - obsahuje svědčící ve prospěch hypotézy A.

Např. pro test hypotézy o střední hodnotě μ normálního rozdělení $H : \mu = \mu_0 \rightarrow A : \mu > \mu_0$ bude kritický obor $W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$, kde μ_0 je předpokládaná hodnota parametru μ, t je hodnota testového kriteria a $t_{1-\alpha}(\nu)$ je kvantil Studentova rozdělení – tzv. **kritická hodnota**.

Testování hypotéz

K testu hypotézy použijeme vhodnou statistiku $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tzv. testové kriterium, která má při platnosti hypotézy H známé pravděpodobnostní rozdělení (zpravidla t, u, χ^2, F). Prostor hodnot této statistiky se rozdělí na 2 disjunktní obory:

- $W_{1-\alpha}$ - **obor přijetí hypotézy** H – množina těch hodnot, které svědčí ve prospěch hypotézy H,
- W_α - **kritický obor** (obor zamítnutí hypotézy H) - obsahuje svědčící ve prospěch hypotézy A.

Např. pro test hypotézy o střední hodnotě μ normálního rozdělení $H : \mu = \mu_0 \rightarrow A : \mu > \mu_0$ bude kritický obor $W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$, kde μ_0 je předpokládaná hodnota parametru μ, t je hodnota testového kriteria a $t_{1-\alpha}(\nu)$ je kvantil Studentova rozdělení – tzv. **kritická hodnota**.

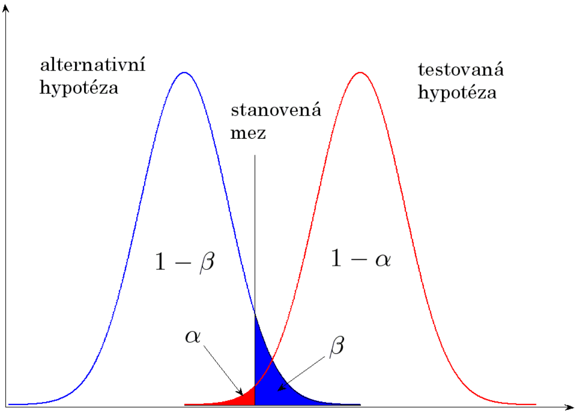
Testování hypotéz

K testu hypotézy použijeme vhodnou statistiku $T = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tzv. testové kriterium, která má při platnosti hypotézy H známé pravděpodobnostní rozdělení (zpravidla t, u, χ^2, F). Prostor hodnot této statistiky se rozdělí na 2 disjunktní obory:

- $W_{1-\alpha}$ - **obor přijetí hypotézy** H – množina těch hodnot, které svědčí ve prospěch hypotézy H,
- W_α - **kritický obor** (obor zamítnutí hypotézy H) - obsahuje svědčící ve prospěch hypotézy A.

Např. pro test hypotézy o střední hodnotě μ normálního rozdělení $H : \mu = \mu_0 \rightarrow A : \mu > \mu_0$ bude kritický obor $W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}(\nu)\}$, kde μ_0 je předpokládaná hodnota parametru μ, t je hodnota testového kriteria a $t_{1-\alpha}(\nu)$ je kvantil Studentova rozdělení – tzv. **kritická hodnota**.

Testování hypotéz



obor zamítnutí testované hypotézy obor přijetí testované hypotézy

Postup při testování hypotéz

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní většinou volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 a 0,01).
3. Zvolíme vhodné testové kriterium (pochopitelně vzhledem k testovanému parametru nebo testované vlastnosti).
4. Vymezíme kritický obor W_α s ohledem na formulaci hypotézy A.
5. Vypočteme hodnotu testového kriteria a určíme příslušné kvantily.

Postup při testování hypotéz

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní většinou volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 a 0,01).
3. Zvolíme vhodné testové kriterium (pochopitelně vzhledem k testovanému parametru nebo testované vlastnosti).
4. Vymezíme kritický obor W_α s ohledem na formulaci hypotézy A.
5. Vypočteme hodnotu testového kriteria a určíme příslušné kvantily.

Postup při testování hypotéz

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní většinou volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 a 0,01).
3. Zvolíme vhodné testové kriterium (pochopitelně vzhledem k testovanému parametru nebo testované vlastnosti).
4. Vymezíme kritický obor W_α s ohledem na formulaci hypotézy A.
5. Vypočteme hodnotu testového kriteria a určíme příslušné kvantily.

Postup při testování hypotéz

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní většinou volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 a 0,01).
3. Zvolíme vhodné testové kriterium (pochopitelně vzhledem k testovanému parametru nebo testované vlastnosti).
4. Vymezíme kritický obor W_α s ohledem na formulaci hypotézy A.
5. Vypočteme hodnotu testového kriteria a určíme příslušné kvantily.

Postup při testování hypotéz

1. Zformulujeme hypotézy H, A (jako alternativní většinou volíme hypotézu, kterou chceme s ohledem na věcný problém prokázat).
2. Zvolíme hladinu významnosti α (zpravidla 0,05 a 0,01).
3. Zvolíme vhodné testové kriterium (pochopitelně vzhledem k testovanému parametru nebo testované vlastnosti).
4. Vymezíme kritický obor W_α s ohledem na formulaci hypotézy A.
5. Vypočteme hodnotu testového kriteria a určíme příslušné kvantily.

Postup při testování hypotéz

6. Zformulujeme závěr:
   - Jestliže hodnota testového kriteria padne do kritického oboru, zamítneme hypotézu H a říkáme, že s pravděpodobností $1-\alpha$ platí hypotéza A. Riziko nesprávnosti tohoto výroku je $100\alpha\%$.
   - Jestliže hodnota testového kriteria padne do oboru přijetí, říkáme že hypotézu H nemůžeme na dané hladině významnosti zamítnout. (Výroku o správnosti H se vyhneme, neboť nebudeme určovat pravděpodobnost chyby β).

Postup při testování hypotéz

6. Zformulujeme závěr:
   - Jestliže hodnota testového kriteria padne do kritického oboru, zamítneme hypotézu H a říkáme, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ platí hypotéza A. Riziko nesprávnosti tohoto výroku je $100\alpha\%$.
   - Jestliže hodnota testového kriteria padne do oboru přijetí, říkáme že hypotézu H nemůžeme na dané hladině významnosti zamítnout. (Výroku o správnosti H se vyhneme, neboť nebudeme určovat pravděpodobnost chyby β).

Postup při testování hypotéz

6. Zformulujeme závěr:
    - Jestliže hodnota testového kriteria padne do kritického oboru, zamítneme hypotézu H a říkáme, že s pravděpodobností $1-\alpha$ platí hypotéza A. Riziko nesprávnosti tohoto výroku je $100\alpha\%$.
    - Jestliže hodnota testového kriteria padne do oboru přijetí, říkáme že hypotézu H nemůžeme na dané hladině významnosti zamítnout. (Výroku o správnosti H se vyhneme, neboť nebudeme určovat pravděpodobnost chyby β).

χ^2-test dobré shody

Hodnoty náhodného výběru $x_1, x_2, \dots, x_n$ roztřídíme do k disjunktních tříd, přičemž $n_j, j = 1, 2, \dots, k$, je četnost j-té třídy resp. j-té obměny a π_j je pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z j-té třídy resp. j-té obměny, počítaná za předpokladu, že X má předpokládané rozdělení. Východiskem pro konstrukci testového kriteria je porovnání statistické pravděpodobnosti (relativní četnosti n_j/n) s hypotetickou pravděpodobností π_j.

χ^2-test dobré shody

Formulujeme hypotézu a alternativu:
H : náhodná veličina X má rozdělení daného typu $\rightarrow$ A : náhodná veličina X nemá rozdělení daného typu.
Testové kriterium je statistika

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j},$$

která má za předpokladu správnosti hypotézy H pro velké n (asymptoticky) Pearsonovo χ^2 rozdělení s $\nu = k - c - 1$ stupni volnosti, kde c je počet odhadovaných parametrů ověřovaného rozdělení. Kritický obor je

$$W_\alpha = \left\{\chi^2, \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(\nu)\right\},$$

kde $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$ je kvantil Pearsonova rozdělení.

χ^2-test dobré shody

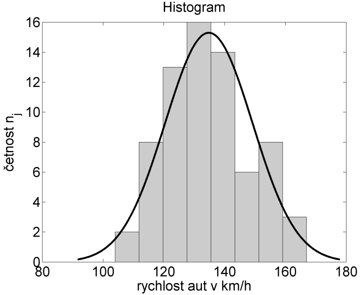
Pozn.: Při praktickém provádění testu se požaduje, aby ve všech třídách byly teoretické četnosti větší než 5, tj.

$$n\pi_j > 5, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Není-li tato podmínka splněna, přistupujeme ke slučování tříd.

Grafické metody

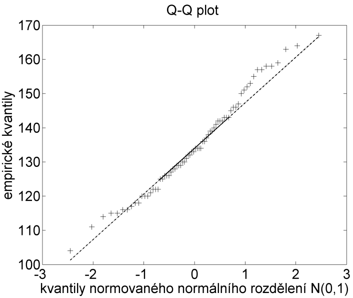
Základní představu o tvaru rozdělení datového souboru získáme pomocí **histogramu**, příp. **polygonu četností**. K histogramu je možné zkonstruovat křivku popisující rozdělení četností, která by se očekávala, pokud by se jednalo o výběr z daného rozdělení.



Obrázek: Grafické metody ověřování normality – histogram s Gaussovou křivkou

Grafické metody

Q-Q plot: jeho konstrukce spočívá ve vynesení dvojic bodů $[X_P, x_p]$, kde X_p jsou kvantily teoretického rozdělení (normálního, exponenciálního, Studentova apod.) a x_p jsou empirické kvantily zjištěné z datového souboru.



Obrázek: Grafické metody ověřování normality – Q-Q plot

Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

O normálním rozdělení víme, že má nulové koeficienty šikmosti a špičatosti $\alpha_3 = 0$ a $\alpha_4 = 0$. Toho se využívá k ověření hypotézy, že X má normální rozdělení. Z výběru se vypočtou odhady obou těchto koeficientů

$$\hat{\alpha}_3 = a_3 = \frac{1}{ns_n^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3, \quad \hat{\alpha}_3 = a_4 = \frac{1}{ns_n^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4 - 3.$$

Formulujeme hypotézy:
$H_1 : \alpha_3 = 0 \to A_1 : \alpha_3 \neq 0$
$H_2 : \alpha_4 = 0 \to A_2 : \alpha_4 \neq 0$

Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

Pokud rozdělení je normální, musí mít oba koeficienty nulové.

1. $H_1 : \alpha_3 = 0 \rightarrow A_1 : \alpha_3 \neq 0$
   Testové kriterium je statistika

   $$u_3 = \frac{a_3}{\sqrt{D(a_3)}}, \quad \text{kde} \quad D(a_3) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)},$$

   která má při platnosti hypotézy H_1 asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Kritický obor je roven

   $$W_\alpha = \left\{u_3, |u_3| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

   kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil rozdělení $N(0,1)$.

Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

2. $H_2 : \alpha_4 = 0 \to A_2 : \alpha_4 \neq 0$
   Testové kriterium je statistika

$$u_4 = \frac{a_4 + \frac{6}{n+1}}{\sqrt{D(a_4)}}, \quad \text{kde} \quad D(a_4) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)},$$

   která má při platnosti hypotézy H_2 asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Kritický obor je roven

$$W_\alpha = \left\{u_4, |u_4| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

   kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil rozdělení $N(0,1)$.

Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

- Jestliže alespoň jeden z testů zamítne hypotézu o nulovosti koeficientů, zamítneme hypotézu o tom, že náhodná veličina X má normální rozdělení (data nejsou výběrem z normálního rozdělení). Budeme říkat, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ nemá náhodná veličina normální rozdělení.
- Pokud nemůžeme zamítnout ani jednu hypotézu o nulovosti koeficientů šikmosti a špičatosti, budeme říkat, že se nám na dané hladině významnosti α nepodařilo zamítnou normalitu, neboli že normální rozdělení je vhodným modelem pro popis náhodné veličiny X.

Pozn. Užití testů nulovosti koeficientu α_3 a α_4 se doporučuje pro dostatečně velké výběry $n > 200$, resp $n > 500$.

Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

- Jestliže alespoň jeden z testů zamítne hypotézu o nulovosti koeficientů, zamítneme hypotézu o tom, že náhodná veličina X má normální rozdělení (data nejsou výběrem z normálního rozdělení). Budeme říkat, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ nemá náhodná veličina normální rozdělení.
- Pokud nemůžeme zamítnout ani jednu hypotézu o nulovosti koeficientů šikmosti a špičatosti, budeme říkat, že se nám na dané hladině významnosti α nepodařilo zamítnou normalitu, neboli že normální rozdělení je vhodným modelem pro popis náhodné veličiny X.

Pozn. Užití testů nulovosti koeficientu α_3 a α_4 se doporučuje pro dostatečně velké výběry $n > 200$, resp $n > 500$.

Testy koeficientů šikmosti a špičatosti

- Jestliže alespoň jeden z testů zamítne hypotézu o nulovosti koeficientů, zamítneme hypotézu o tom, že náhodná veličina X má normální rozdělení (data nejsou výběrem z normálního rozdělení). Budeme říkat, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ nemá náhodná veličina normální rozdělení.
- Pokud nemůžeme zamítnout ani jednu hypotézu o nulovosti koeficientů šikmosti a špičatosti, budeme říkat, že se nám na dané hladině významnosti α nepodařilo zamítnou normalitu, neboli že normální rozdělení je vhodným modelem pro popis náhodné veličiny X.

Pozn. Užití testů nulovosti koeficientu α_3 a α_4 se doporučuje pro dostatečně velké výběry $n > 200$, resp $n > 500$.

Kombinovaný test koeficientů α_3 a α_4: C-test

Pro testování normality je možné využít známý poznatek, že součet k čtverců nezávislých normovaných normálních veličin má Pearsonovo χ^2 rozdělení s k stupni volnosti.

Formulujeme hypotézy:

H : náhodná veličina X má normální rozdělení $\rightarrow$ A : náhodná veličina X nemá normální rozdělení.

Testové kriterium je statistika

$$C = u_3^2 + u_4^2,$$

která má při platnosti hypotézy H χ^2 rozdělení se dvěma stupni volnosti. u_3 a u_4 jsou statistiky definované v testech nulovosti koeficientů šikmosti a špičatosti. Kritický obor je

$$W_\alpha = \left\{C, C \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)\right\},$$

kde $\chi^2_{1-\alpha}(2)$ je kvantil Pearsonova χ^2 rozdělení.

Modifikované testy

V literatuře se uvádí, že C-test, ve tvaru, jak bylo uvedeno, by se měl používat pouze pro velké náhodné výběry ($n > 200$). Pro výběry menšího rozsahu je možné spočítat statistiku

$$z_3 = \delta \ln \left[\frac{u_3}{a} + \sqrt{\left(\frac{u_3}{a}\right)^2 + 1} \right], \text{ kde}$$

$$b = \frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)},\ W^2 = \sqrt{2(b-1)}-1,\ \delta = \frac{1}{\sqrt{\ln W}},\ a = \sqrt{\frac{2}{W^2-1}}$$

a statistiku

$$z_4 = \frac{1 - \frac{2}{9A} - \sqrt[3]{\frac{1-\frac{2}{A}}{1+u_4\sqrt{\frac{2}{A-4}}}}}{\sqrt{\frac{2}{9A}}}, \text{ kde}$$

$$B = \frac{6(n^2-5n+2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}},\ A = 6 + \frac{8}{B}\left(\frac{2}{B} + \sqrt{1 + \frac{4}{B^2}}\right).$$

Modifikované testy

Nově zavedené testové kritérium $C' = z_3^2 + z_4^2$ má při platnosti hypotézy H rozdělení χ^2 se dvěma stupni volnosti. Normalitu tedy zamítáme, pokud je $C' \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)$.
Daný test je možné použít pro výběry rozsahu většího než 20.

Pomocí statistik z_3 a z_4 lze také testovat nulovost koeficientu šikmosti a špičatosti. Obě mají při platnosti nulové hypotézy přibližně normované normální rozdělení. Test nulovosti koeficientu šikmosti založený na statistice z_3 je možné aplikovat již na výběry o rozsahu $n > 8$, zatímco test pomocí statistiky u_3 by se měl použít pro $n > 200$. Podobně nulovost koeficientu špičatosti lze testovat pomocí statistiky z_4 již pro $n > 20$, zatímco původní nemodifikovaný test využívající statistiku u_4 by se měl používat jen pro velká n ($n > 500$).