Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 1

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Literatura

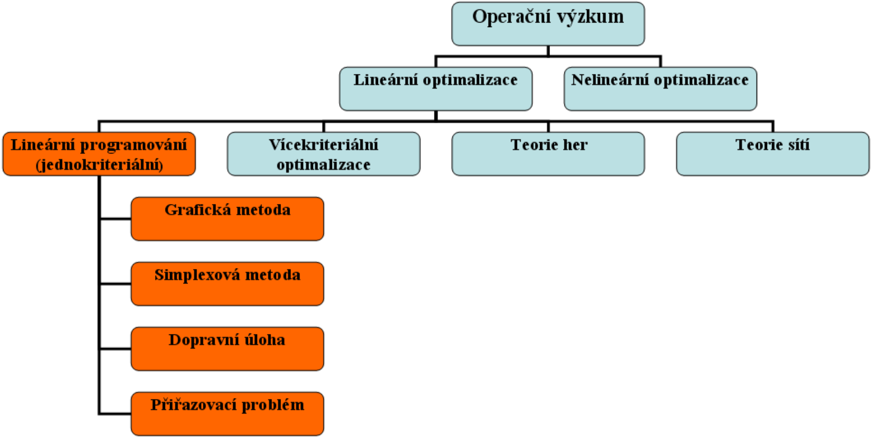
Základní literatura

- MOUČKA, J., ŠMEREK, M. **Ekonomicko-matematické metody pro distanční studium.** Brno : UO, 2008.
- JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum.* VŠE, Praha 2001.
- KŘÍŽ, O. *Lineární programování.* Skripta VVŠ, Vyškov 1988.
- MOŠOVÁ, V. *Lineární programování.* VVŠ PV, Vyškov 1996.

Doporučená literatura

- JABLONSKÝ, J., PELZBAUEROVÁ, V. *Optimální programování.* SPN, Praha 1988.
- RAŠOVSKÝ, M. *Operační analýza a modelování I.* Skripta VŠZ Brno, 1994.

Operační výzkum



Operační výzkum

- souhrn metod, pomocí nichž se řeší rozhodovací situace

Operační výzkum

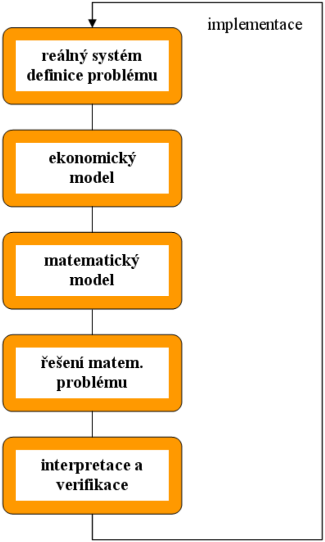
- souhrn metod, pomocí nichž se řeší rozhodovací situace
- řeší problémy, které mají obecně více možných řešení a mezi nimi hledá to řešení, které nejlépe vede k zadanému cíli – hledá se tzv. **optimální řešení**

Operační výzkum

- souhrn metod, pomocí nichž se řeší rozhodovací situace
- řeší problémy, které mají obecně více možných řešení a mezi nimi hledá to řešení, které nejlépe vede k zadanému cíli – hledá se tzv. **optimální řešení**
- základním nástrojem operačního výzkumu je **matematické modelování**

Operační výzkum

- souhrn metod, pomocí nichž se řeší rozhodovací situace
- řeší problémy, které mají obecně více možných řešení a mezi nimi hledá to řešení, které nejlépe vede k zadanému cíli – hledá se tzv. **optimální řešení**
- základním nástrojem operačního výzkumu je **matematické modelování**
- anglo-americké ekvivalenty: **operational research, operations research, management science**


implementace
reálný systém definice problému
ekonomický model
matematický model
řešení matem. problému
interpretace a verifikace

Ekonomický model

- **cíl** (kriterium), tzn. pokud možno jednoznačné určení cílového stavu modelovaného systému (cílem může být maximalizace zisku při plánování výrobního plánu firmy, minimalizace rizika při řízení investiční strategie, minimalizace nákladů při rozvozu zboží apod.)

Ekonomický model

- **cíl** (kriterium), tzn. pokud možno jednoznačné určení cílového stavu modelovaného systému (cílem může být maximalizace zisku při plánování výrobního plánu firmy, minimalizace rizika při řízení investiční strategie, minimalizace nákladů při rozvozu zboží apod.)
- popis **procesů**, které v systému probíhají, rozumí se reálná aktivita, která v systému probíhá s nějakou intenzitou a má vliv na cíl analýzy (při plánování výrobního procesu může být procesem např. výroba výrobku a intenzitou procesu objem výroby)

Ekonomický model

- popis **činitelů** ovlivňující provádění procesů (spotřeba omezených zdrojů surovin, strojového času, energie . . .)

Ekonomický model

- popis **činitelů** ovlivňující provádění procesů (spotřeba omezených zdrojů surovin, strojového času, energie . . .)
- popis vzájemného vztahu mezi procesy, činiteli a cílem analýzy (např. kolik suroviny je potřeba při výrobě daného výrobku a jaký zisk tato výroby přinese – přepokládá se maximalizace zisku)

Matematický model

- cíl je zpravidla vyjádřen ve formě lineární či nelineární funkce n proměnných

Matematický model

- cíl je zpravidla vyjádřen ve formě lineární či nelineární funkce n proměnných
- procesům odpovídají proměnné, intenzity jsou potom vyjádřeny jako hodnoty těchto proměnných

Matematický model

- cíl je zpravidla vyjádřen ve formě lineární či nelineární funkce n proměnných
- procesům odpovídají proměnné, intenzity jsou potom vyjádřeny jako hodnoty těchto proměnných
- činitelé mohou být vyjádření rozličnými způsoby, jedním z běžných způsobů je jejich vyjádření ve formě lineárních či nelineárních rovnic a nerovnic

Matematický model

- cíl je zpravidla vyjádřen ve formě lineární či nelineární funkce n proměnných
- procesům odpovídají proměnné, intenzity jsou potom vyjádřeny jako hodnoty těchto proměnných
- činitelé mohou být vyjádření rozličnými způsoby, jedním z běžných způsobů je jejich vyjádření ve formě lineárních či nelineárních rovnic a nerovnic
- vazby mezi procesy a činitely a cílem analýzy jsou popisovány pomocí parametrů, jejichž hodnoty nemůže uživatel ovlivňovat

Klasifikace ekonomicko – matematických modelů

- podle rozsahu zobrazované reality
  - mikroekonomické modely
  - makroekonomické modely

Klasifikace ekonomicko – matematických modelů

- podle rozsahu zobrazované reality
  - mikroekonomické modely
  - makroekonomické modely
- podle povahy vztahů mezi veličinami
  - deterministické modely
  - stochastické modely

Klasifikace ekonomicko – matematických modelů

- podle rozsahu zobrazované reality
  - mikroekonomické modely
  - makroekonomické modely
- podle povahy vztahů mezi veličinami
  - deterministické modely
  - stochastické modely
- podle závislosti mezi veličinami
  - lineární modely
  - nelineární modely

Klasifikace ekonomicko – matematických modelů

- podle závislosti veličin na čase
  - statické modely
  - dynamické modely

Klasifikace ekonomicko – matematických modelů

- podle závislosti veličin na čase
  - statické modely
  - dynamické modely
- podle počtu cílů (kriterií)
  - jednokriteriální modely
  - vícekriteriální modely

Klasifikace ekonomicko – matematických modelů

- podle závislosti veličin na čase
  - statické modely
  - dynamické modely
- podle počtu cílů (kriterií)
  - jednokriteriální modely
  - vícekriteriální modely
- podle počtu subjektů rozhodování
  - nekonfliktní modely
  - konfliktní modely

Příklad

Podnik vyrábí 3 druhy výrobků V_1, V_2 a V_3. Na výrobu 1 výrobku V_1 se spotřebuje 15 kg suroviny S, 3 kWh energie a výroba trvá 1 hodinu strojového času. Na výrobu výrobku V_2 se spotřebuje 20 kg suroviny S, 4 kWh energie a 1/2 hodiny strojového času. Na výrobek V_3 je potřeba 40 kg suroviny S, 7 kWh energie a 3 hodiny strojového času. Z prodeje výrobku V_1 má podnik zisk 700 Kč, u výrobku V_2 zisk 500 Kč a u výrobku V_3 zisk 1 300 Kč. Podnik má k dispozici 10 000 kg suroviny S, 4 000 kWh energie a 1 000 hodin strojového času. Při jakém výrobním plánu bude zisk podniku maximální?

Příklad

Ekonomický model	Výrobky V_1	V_2	V_3	Disponibilní množství
surovina S	15	20	40	10 000
energie	3	4	7	4 000
strojový čas	1	1/2	3	1 000
zisk	700	500	1300	max

Příklad

Matematický model

Model bude obsahovat 3 proměnné:
x_1 ... počet vyrobených výrobků V_1
x_2 ... počet vyrobených výrobků V_2
x_3 ... počet vyrobených výrobků V_3

Příklad

Matematický model

Model bude obsahovat 3 proměnné:
x_1 . . . počet vyrobených výrobků V_1
x_2 . . . počet vyrobených výrobků V_2
x_3 . . . počet vyrobených výrobků V_3

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- nelze vyrábět záporné množstní výrobků $\longrightarrow$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ (tzv. **podmínky nezápornosti**)

Příklad

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- při výrobě 1 výrobku V_1 spotřebujeme 15 kg suroviny S. Vyrobíme-li x_1 těchto výrobků, pak spotřebujeme $15x_1$ kg suroviny. Analogicky pro výrobky V_2 a V_3. Celková spotřeba suroviny S bude $15x_1 + 20x_2 + 40x_3$ kg. Tato spotřeba však nesmí přesáhnout disponibilní množství, tedy můžeme psát $15x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 10000$. Analogické vztahy dostaneme i pro energii a strojový čas.

Příklad

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- při výrobě 1 výrobku V_1 spotřebujeme 15 kg suroviny S. Vyrobíme-li x_1 těchto výrobků, pak spotřebujeme $15x_1$ kg suroviny. Analogicky pro výrobky V_2 a V_3. Celková spotřeba suroviny S bude $15x_1 + 20x_2 + 40x_3$ kg. Tato spotřeba však nesmí přesáhnout disponibilní množství, tedy můžeme psát $15x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 10000$. Analogické vztahy dostaneme i pro energii a strojový čas. Omezující podmínky zapíšeme ve tvaru soustavy nerovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 15x_1 & + & 20x_2 & + & 40x_3 & \leq & 10000 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & \leq & 4000 \\ x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 3x_3 & \leq & 1000 \end{array}$$

Příklad

Matematické vyjádření cíle (maximalizace tzv. **účelové funkce**):

$$z = 700x_1 + 500x_2 + 1300x_3 \longrightarrow \max$$

Příklad

Balírny a pražírny kávy DE, a.s. plánují na následující období výrobu dvou směsí kávy **Mocca** a **Standard**. Pro výrobu obou směsí mají přitom na toto období smluvně k dispozici od dodavatelů tři druhy kávových bobů (označme je K_1, K_2 a K_3) postupně v kapacitě 40, 60 a 25 tun, které se navzájem liší kvalitou i nákupní cenou. Při výrobě obou směsí je třeba dodržovat technologické postupy, které mimo jiné určují, jaké procento jednotlivých komponent bude použito při této výrobě.

Příklad

Tabulka ukazuje skladbu obou směsí (v tunách komponenty na 1 tunu směsi):

Komponenta	Směs		Kapacita
	Mocca	**Standard**	[tuna]
K_1	0,5	0,25	40
K_2	0,5	0,5	60
K_3	–	0,25	25

Na základě přímých a nepřímých nákladů souvisejících s výrobou byl vykalkulován zisk, který činí 20 000 Kč resp. 14 000 Kč na jednu tunu směsi **Mocca** resp. **Standard**. Management firmy chce naplánovat produkci tak, aby její zisk byl maximální.

Příklad

Matematický model

Model bude obsahovat 2 proměnné:
x_1 . . . množství směsi **Mocca**
x_2 . . . množství směsi **Standard**

Příklad

Matematický model

Model bude obsahovat 2 proměnné:
x_1 . . . množství směsi **Mocca**
x_2 . . . množství směsi **Standard**

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- nelze vyrábět záporné množství směsi $\longrightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (tzv. **podmínky nezápornosti**)

Příklad

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- na výrobu 1 tuny směsi **Mocca** se spotřebuje 0,5 tuny komponenty K_1, na výrobu x_1 tun se jí spotřebuje $0{,}5x_1$ tun. Na výrobu 1 tuny směsi **Standard** se spotřebuje 0,25 tuny komponenty K_1, na výrobu x_2 tun se jí spotřebuje $0{,}25x_2$ tun. Celková spotřeba komponenty K_1 je tedy $0{,}5x_1 + 0{,}25x_2$. Tato spotřeba nemůže přesáhnou kapacitu, tj. 40 tun. Danou podmínku zapíšeme nerovnicí $0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \leq 40$.

Příklad

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- Obdobným způsobem získáme nerovnice vyjadřující vztahy mezi spotřebou a kapacitou komponent K_2 a K_3. Omezující podmínky jsou vyjádřeny následující soustavou lin. nerovnic

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\leq 40 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 &\leq 60 \\ 0{,}25x_2 &\leq 25 \end{aligned}$$

Příklad

Matematické vyjádření omezujících podmínek:

- Obdobným způsobem získáme nerovnice vyjadřující vztahy mezi spotřebou a kapacitou komponent K_2 a K_3. Omezující podmínky jsou vyjádřeny následující soustavou lin. nerovnic

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\leq 40 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 &\leq 60 \\ 0{,}25x_2 &\leq 25 \end{aligned}$$

Matematické vyjádření cíle (maximalizace tzv. **účelové funkce**):

$$z = 20000x_1 + 14000x_2 \longrightarrow \max$$

Soustava lineárních rovnic

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých rozumíme systém rovnic

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

kde **A** je **matice soustavy** (typu $m \times n$), $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots, n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je sloupcový vektor neznámých a $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ je sloupcový vektor pravých stran. Danou soustavu je možné zapsat v maticovém vyjádření

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Matice $\mathbf{R} = (\mathbf{A}|\vec{b})$ je tzv. **rozšířená matice soustavy**.

Soustava lineárních rovnic

Podmínky řešitelnost dané soustavy udává **Frobeniova věta**: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna hodnosti matice $\mathbf{R}$, tj.

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}).$$

Počet řešení dané soustavy rovnic závisí na hodnosti matice soustavy:

- je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) = n$, pak má soustava právě 1 řešení

Soustava lineárních rovnic

Podmínky řešitelnost dané soustavy udává **Frobeniova věta**: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna hodnosti matice $\mathbf{R}$, tj.

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}).$$

Počet řešení dané soustavy rovnic závisí na hodnosti matice soustavy:

- je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) = n$, pak má soustava právě 1 řešení
- je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení

Soustava lineárních rovnic

Podmínky řešitelnost dané soustavy udává **Frobeniova věta**: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna hodnosti matice $\mathbf{R}$, tj.

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}).$$

Počet řešení dané soustavy rovnic závisí na hodnosti matice soustavy:

- je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) = n$, pak má soustava právě 1 řešení
- je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení
- je-li $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{R}) = n$, pak nemá řešení

Soustava lineárních rovnic

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Soustava lineárních rovnic

Pro hodnosti platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R}) = 2 < 4$, soustava má nekonečně mnoho řešení, k jejich vyjádření bude potřeba $n - h = 4 - 2 = 2$ parametry. Ekvivalentními úpravami jsme dostali soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Zvolíme např. $x_3 = t, x_2 = s$, kde $s, t \in \mathbb{R}$, potom $x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2s - t$, můžeme psát

$$\vec{x} = (2s - t, s, t, 1)'.$$

Soustava lineárních rovnic

$$\vec{x} = (2s - t, s, t, 1)'$$

Konkrétní řešení dostaneme dosazením konkrétních čísel za parametry s a t.

Možná řešení:

$$\begin{array}{ll} s = 2, t = 1 & \vec{x} = (3, 2, 1, 1)' \\ s = 1, t = 0 & \vec{x} = (2, 1, 0, 1)' \\ s = -1, t = 1 & \vec{x} = (-3, -1, 1, 1)' \\ s = 0, t = 0 & \vec{x} = (0, 0, 0, 1)' \end{array}$$

Základní definice

Řešení,ve kterém za parametry volíme nuly, se nazývá **základní řešení**. Neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_h$ jsou tzv. **základní (bázické) proměnné**, ostatní neznámé $x_{h+1}, \ldots, x_n$ (které volíme za parametry) nazýváme **vedlejší proměnné**.

Základní definice

Řešení,ve kterém za parametry volíme nuly, se nazývá **základní řešení**. Neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_h$ jsou tzv. **základní (bázické) proměnné**, ostatní neznámé $x_{h+1}, \ldots, x_n$ (které volíme za parametry) nazýváme **vedlejší proměnné**.

Jsou-li všechny základní proměnné $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$, řešení nazýváme **nedegenerované**, je-li alespoň 1 základní proměnná $x_i = 0$, řešení se označuje za **degenerované**.

Kanonický tvar

Při řešení úloh lineárního programování se budeme často setkávat se soustavou lineárních rovnic v **kanonickém tvaru**:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & & & + & a_{1,h+1}x_{h+1} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
& x_2 & & + & a_{2,h+1}x_{h+1} & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \\
& & x_h & + & a_{h,h+1}x_{h+1} & + & \dots & + & a_{hn}x_n & = & b_h
\end{array}$$

Základní řešení soustavy lin. rovnic je potom $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2, \dots, x_h = b_h$, $x_{h+1} = \dots = x_n = 0$, tedy

$$\vec{x} = (b_1, b_2, \dots, b_h, 0, \dots, 0)'.$$

Kanonický tvar

Matice soustavy lineárních rovnic v kanonickém tvaru je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,h+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,h+1} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{h,h+1} & \dots & a_{hn} \end{pmatrix}$$

Příklad

Úplnou eliminací řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 11x_2 & + & & + & 4x_4 & = & 30 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 18 \\ & & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 22 \end{array}$$

Příklad

Počet všech základních řešení soustavy m lineárně nezávislých rovnic o n neznámých je

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!},$$

což je v našem případě

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4.$$

Soustava lineárních nerovnic

Je-li **A** matice soustavy, $\vec{x}$ vektor neznámých a $\vec{b}$ vektor pravých stran (absolutních členů), rozumíme soustavou m lineárních rovnic o n neznámých soustavu

$$\mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b} \quad \text{tj.} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (\leq),$$

resp.

$$\mathbf{A}\vec{x} \geq \vec{b} \quad \text{tj.} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (\geq),$$

pro $i = 1, \ldots m$.

Soustava lineárních nerovnic

Nerovnice převedeme na rovnice pomocí tzv. **doplňkových proměnných** $x_i' \geq 0$ takto:

- nerovnice typu $(\leq)$ přejde v rovnici

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_i' = b_i$$

- nerovnice typu $(\geq)$ přejde v rovnici

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_i' = b_i$$

Příklad

Řešte soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leq 850 \\ x_1 + x_2 &\leq 150 \end{aligned}$$

Příklad

Řešte soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leq 850 \\ x_1 + x_2 &\leq 150 \end{aligned}$$

Soustava lin. rovnic má tvar

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + x_1' &= 850 \\ x_1 + x_2 + x_2' &= 150 \end{aligned}$$