Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 11

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Přiřazovací problém

Jedná se o speciální případ dopravních úloh, řeší např. problematiku optimálního přiřazení strojů na pracoviště.

Příklad

Podnik má k dispozici 3 jeřáby, které má přepravit na 3 pracoviště. Vzdálenosti mezi stanovišti jeřábů J_i a pracovišť P_i jsou uvedeny v tabulce (v kilometrech).

c_{ij}	P_1	P_2	P_3
J_1	4	3	1
J_2	1	2	6
J_3	4	5	3

Nalezněte optimální plán přepravy, při kterém bude počet ujetých kilometrů minimální.

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij} \ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij} \ \ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$J_1 : \ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij} \ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$\begin{aligned} J_1 :\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ J_2 :\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \end{aligned}$$

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij}\ \ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$\begin{aligned} J_1 &: x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ J_2 &: x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ J_3 &: x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{aligned}$$

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij} \ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$\begin{aligned} J_1 &: x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ J_2 &: x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ J_3 &: x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ P_1 &: x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \end{aligned}$$

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij} \ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$\begin{aligned}
J_1 &: x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\
J_2 &: x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\
J_3 &: x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\
P_1 &: x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
P_2 &: x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1
\end{aligned}$$

Přiřazovací problém

- proměnné: x_{ij} $\ldots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$\begin{array}{rcl} J_1: & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = 1 \\ J_2: & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 1 \\ J_3: & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = 1 \\ P_1: & x_{11} + x_{21} + x_{31} & = 1 \\ P_2: & x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 1 \\ P_3: & x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 1 \end{array}$$

Přiřazovací problém

- proměnné: $x_{ij} \dots i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeřáb } J_i \text{ je přiřazen na pracoviště } P_j \\ 0 & \text{jeřáb } J_i \text{ není přiřazen na pracoviště } P_j \end{cases}$$

- omezení:

$$\begin{aligned} J_1 &: x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ J_2 &: x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ J_3 &: x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ P_1 &: x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ P_2 &: x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ P_3 &: x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{aligned}$$

- účelová funkce

$$z = 4x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} \quad \rightarrow \quad \min$$

Přiřazovací problém

Obecně jde o to přiřadit n činitelů n jiným činitelům tak, aby součet příslušných sazeb byl minimální (resp. maximální) Obecný model má tvar:

- proměnné: $x_{ij} \ldots i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad n^2\text{proměnných}$$

- omezení:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2 \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2 \ldots, n \end{aligned}\right\} \qquad \text{celkem } n^2 \text{ omezení (rovnic)}$$

- účelová funkce

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

n proměnných nabývá hodnoty 1, zbývajících $n^2 - n$ proměnných má hodnotu 0, jedná se o silně degenerované řešení.

Maďarská metoda

Předpokládejme, že úloha je minimalizační. Postup:

1. Provedeme redukci sazeb matice:
   - i) Od každého řádku matice odečteme nejmenší sazbu v tomto řádku.
   - ii) Od každého sloupce matice odečteme nejmenší sazbu v tomto sloupci.

   Redukce sazeb neovlivní tvar řešení, pouze se sníží hodnota účelové funkce o součet všech odečtených sazeb. Tato redukce zajistí, že v každém řádku i sloupci bude alespoň jedna nula.

Maďarská metoda

2. V redukované matici vyhledáme tzv. **nezávislé nuly**, t.j nuly, z nichž se každá nachází v jiném řádku a jiném sloupci.
   i) Za nezávislou nulu zvolíme tu, která se nachází ve svém řádku či sloupci samostatně.
   ii) Vynecháme řádky a sloupce, na jejichž průsečíku se nezávislé nuly nachází, a na vzniklé submatici pokračujeme bodem 2i).
   iii) Pokud každý řádek či sloupec obsahuje víc než 1 nulu, vybereme řádek či sloupec s nejmenším počtem nul a libovolnou nulu zvolíme za nezávislou a pokračujeme bodem 2ii).

Maďarská metoda

3. Podaří-li se nám vybrat n nezávislých nul, obsadíme místa matice, kde se nezávislé nuly nachází, hodnotou 1, ostatní pole hodnotou 0. Získali jsme optimální řešení přiřazovacího problému. Hodnota účelové funkce je rovna součtu původních sazeb příslušných místům obsazených jedničkami.

Maďarská metoda

4. je-li počet nezávislých nul menší než n, zjistíme podle Königovy věty, zda jsme vybrali maximální počet nezávislých nul.

Königova věta

Maximální počet nezávislých nul je roven minimálnímu počtu **krycích čar**, jimiž je možné pokrýt všechny nulové sazby.

Maďarská metoda

Konstrukce krycích čar:

i) Řádky či sloupce, ve kterých neleží nezávislé nuly označíme $*$. Nulovými sazbami takto označených řádků (resp. sloupců) vedeme svislé (resp. vodorovné) krycí čáry.

ii) Vynecháme řádky a sloupce označené $*$ a řádky a sloupce pokryté čarami a vzniklé submatici pokračujeme bodem 4i).

iii) Zůstanou-li nepokryté pouze řádky a sloupce s nezávislými nulami, vedeme minimální počet krycích čar i přes tyto nuly.

Maďarská metoda

5. Je-li Königova věta splněna, přistoupíme k další redukci matice sazeb:
   i) Z nepokrytých polí vybereme minimální sazbu.
   ii) Hodnotu této sazby odečteme od všech sazeb nepokrytých krycími čarami a přičteme k sazbám, kde se krycí čáry kříží. Sazby pokryté krycími čarami opíšeme.
6. Celý postup opakujeme od bodu 2 (hledání nezávislých nul).

Maďarská metoda

Příklad

Řešte přiřazovací problémy zadané maticemi sazeb

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 7 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 10 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Maďarská metoda

Příklad

Ze 4 stanovišť odesíláme po 1 autě do vzdálených pracovišť. Údaje o vzdálenostech v km jsou uvedeny v tabulce. Nalezněte takové přiřazení, které bude minimalizovat celkové ujeté kilometry.

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	5	17	23	10
A_2	6	15	17	15
A_3	20	10	10	15
A_4	10	15	20	15

Maďarská metoda

Můžeme se setkat i s přiřazovací úlohou maximalizačního typu. Tuto úlohu řešíme převedením na úlohu minimalizační tím, že všechny sazby vynásobíme číslem (-1), dále postupujeme maďarskou metodou.

Maďarská metoda

Můžeme se setkat i s přiřazovací úlohou maximalizačního typu. Tuto úlohu řešíme převedením na úlohu minimalizační tím, že všechny sazby vynásobíme číslem (-1), dále postupujeme maďarskou metodou.

Příklad

4 pracovníci $(P_i, i = 1, \ldots, 4)$ mohou vyrábět 4 druhy výrobků $(V_j, j = 1, \ldots, 4)$. Počet výrobků V_j, které pracovník P_i vyrobí za 1 hodinu práce je uveden v tabulce. Určete, které výrobky bude vyrábět jaký pracovník, aby celkový počet vyrobených výrobků za 1 hodinu byl maximální.

	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	5	17	23	10
P_2	6	15	17	15
P_3	20	10	10	15
P_4	10	15	20	15