Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 2

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Euklidovský prostor E_n

Pod pojmem ***n*-rozměrný euklidovský prostor** budeme rozumnět prostor, jehož prvky jsou uspořádané *n*-tice reálných čísel $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, které budeme nazývat *body*.

Nadrovina

Nadrovinou nazveme množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$, které vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_0.$$

Nadrovina

Nadrovina N dělí prostor E_n na 3 disjunktní části:

- množina bodů P_1, pro něž platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n < a_0 \quad \longrightarrow \quad \text{otevřený poloprostor}$$

Nadrovina

Nadrovina N dělí prostor E_n na 3 disjunktní části:

- množina bodů P_1, pro něž platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n < a_0 \quad \longrightarrow \quad \text{otevřený poloprostor}$$

- množina bodů N, pro něž platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_0 \quad \longrightarrow \quad \text{nadrovina}$$

Nadrovina

Nadrovina N dělí prostor E_n na 3 disjunktní části:

- množina bodů P_1, pro něž platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n < a_0 \quad \longrightarrow \quad \text{otevřený poloprostor}$$

- množina bodů N, pro něž platí

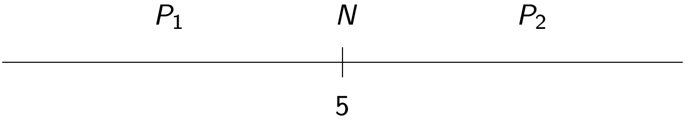
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_0 \quad \longrightarrow \quad \text{nadrovina}$$

- množina bodů P_2, pro něž platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > a_0 \quad \longrightarrow \quad \text{otevřený poloprostor}$$

Příklad

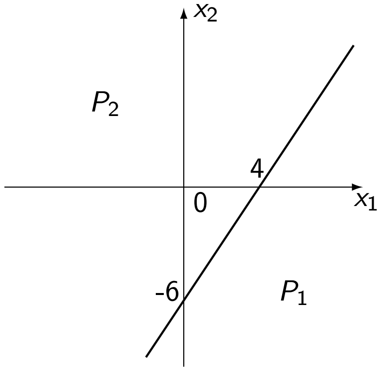
Prostor E_1 . . . nadrovinou je bod $\quad A = 5$



- $P_1 \quad x < 5 \quad$ polopřímka
- $N \quad x = 5 \quad$ nadrovina
- $P_2 \quad x > 5 \quad$ polopřímka

Příklad

Prostor E_2 ... nadrovinou je přímka $3x_1 - 2x_2 = 12$



- P_1 $3x_1 - 2x_2 > 12$ polopřímka
- N $3x_1 - 2x_2 = 12$ přímka
- P_2 $3x_1 - 2x_2 < 12$ polopřímka

Příklad

Znázorněte v rovině množinu bodů splňující

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Přímka

Množina bodů X, pro které platí

$$X = (1-\lambda)A + \lambda B,$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, B \in E_n$ se nazývá **přímka procházející body A, B.**

Příklad

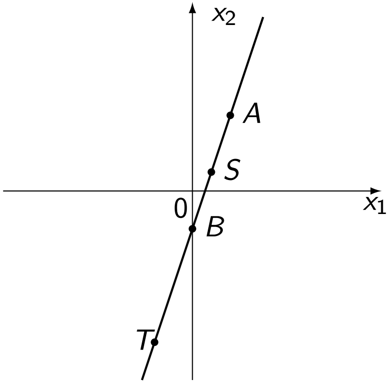
Napište rovnici přímky procházející body $A[1, 2]$ a $B[0, -1]$.

$$X = (1 - \lambda)[1, 2] + \lambda[0, -1]$$

Příklad

Napište rovnici přímky procházející body $A[1,2]$ a $B[0,-1]$.

$$X = (1-\lambda)[1,2] + \lambda[0,-1]$$



Volbou $\lambda = \frac{1}{2}$ dostaneme bod $S = (1-\frac{1}{2})[1,2] + \frac{1}{2}[0,-1] = \frac{1}{2}[1,2] + \frac{1}{2}[0,-1] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Volbou $\lambda = 2$ dostaneme bod $T = (1-2)[1,2] + 2[0,-1] = -[1,2] + 2[0,-1] = [-1,-4]$

Úsečka

Množina bodů X splňující

$$X = (1-\lambda)A + \lambda B,$$

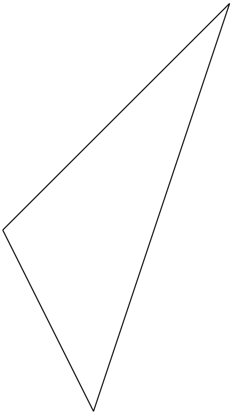
kde $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, $A, B \in E_n$ se nazývá **úsečka spojující body A, B.**

Konvexní množina

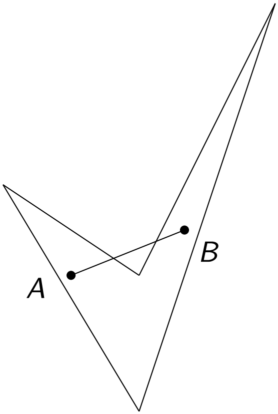
Řekneme, že množina $K \subset E_n$ je **konvexní**, obsahuje-li s každými 2 body A, B i úsečku spojující tyto body.

Konvexní množina

Řekneme, že množina $K \subset E_n$ je **konvexní**, obsahuje-li s každými 2 body A, B i úsečku spojující tyto body.



konvexní množina



nekonvexní množina

Krajní bod

Bod $X \in K \subset E_n$ se nazývá **krajním bodem** konvexní množiny K, neexistují-li 2 různé body A, B (přičemž $X \neq A$, $X \neq B$) takové, že bod X leží na úsečce AB.

Krajní bod

Bod $X \in K \subset E_n$ se nazývá **krajním bodem** konvexní množiny K, neexistují-li 2 různé body A, B (přičemž $X \neq A$, $X \neq B$) takové, že bod X leží na úsečce AB.

množina	konvexnost	krajní body
trojúhelník	ano	vrcholy
kruh	ano	kružnice
kružnice	ne	–

Ohraničená a neohraničená množina

Konvexní množina K se nazývá **ohraničená**, neobsahuje-li žádnou polopřímku. Obsahuje-li alespoň 1 polopřímku, nazývá se **neohraničená**.

Věta o průniku

Průnik konvexních množin je opět konvexní množina.

Úloha výrobního plánování

Podnik vyrábí 2 druhy výrobků V_1 a V_2. Tabulka udává spotřebu surovin S_1 a S_2 v kg potřebných na výrobu 1 kusu výrobku. Zisk z 1 výrobku V_1 je 18 Kč a z 1 výrobku V_2 je 8 Kč. Dále je v tabulce uvedeno množství surovin, kterým podnik disponuje. Stanovte optimální výrobní plán, aby podnik dosáhl maximálního zisku.

Ekonomický model	Výrobky		Disponibilní množství
	V_1	V_2	
S_1 [kg/ks]	4	2	2000
S_2 [kg/ks]	4	1	1600
zisk [Kč/ks]	18	8	max

Úloha výrobního plánování

Matematický model:

proměnné	x_1	$\ldots$	počet výrobků V_1
	x_2	$\ldots$	počet výrobků V_2

výrobní plán $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Úloha výrobního plánování

Matematický model:

proměnné	x_1	$\ldots$	počet výrobků V_1
	x_2	$\ldots$	počet výrobků V_2

výrobní plán $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

- např. $\vec{x} = (300, 100)'$
  Spotřeba surovin při tomto výrobním plánu bude

$$S_1: \quad 300 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 1400\,\mathrm{kg} < 2000$$

$$S_2: \quad 300 \cdot 4 + 100 \cdot 1 = 1300\,\mathrm{kg} < 1600$$

Úloha výrobního plánování

Matematický model:

proměnné	x_1	...	počet výrobků V_1
	x_2	...	počet výrobků V_2

výrobní plán $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

- např. $\vec{x} = (300, 100)'$
  Spotřeba surovin při tomto výrobním plánu bude

$$S_1: \quad 300 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 1400\,\text{kg} < 2000$$

$$S_2: \quad 300 \cdot 4 + 100 \cdot 1 = 1300\,\text{kg} < 1600$$

  Jedná se tedy o **přípustné řešení** úlohy LP. Zisk je $300 \cdot 18 + 100 \cdot 8 = 6200$ Kč.

Úloha výrobního plánování

- např. $\vec{x} = (250, 700)'$
  Spotřeba surovin při tomto výrobním plánu bude

$$S_1 : \quad 250 \cdot 4 + 700 \cdot 2 = 2400\,\text{kg} > 2000$$

$$S_2 : \quad 250 \cdot 4 + 700 \cdot 1 = 1700\,\text{kg} > 1600$$

Úloha výrobního plánování

- např. $\vec{x} = (250, 700)'$
  Spotřeba surovin při tomto výrobním plánu bude

$$S_1: \quad 250 \cdot 4 + 700 \cdot 2 = 2400\,\text{kg} > 2000$$

$$S_2: \quad 250 \cdot 4 + 700 \cdot 1 = 1700\,\text{kg} > 1600$$

  Jedná se tedy o **nepřípustné řešení** úlohy LP.

Úloha výrobního plánování

- obecně $\vec{x} = (x_1, x_2)'$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 2000 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 1600 \end{aligned}$$

Úloha výrobního plánování

- obecně $\vec{x} = (x_1, x_2)'$

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 2x_2 \leq 2000 \\ 4x_1 &+ x_2 \leq 1600 \end{aligned}$$

- účelová funkce má tvar

$$z(x_1, x_2) = 18x_1 + 8x_2 \qquad \longrightarrow \max$$

Taková úloha se označuje za **maximalizační úlohu**.

Úloha výrobního plánování

Postup při řešení:

- soustavu lin. nerovnic přepíšeme na soustavu lin. rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_1' & & & = & 2000 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & + & x_2' & = & 1600 \end{array}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1' \geq 0,\ x_2' \geq 0$

Úloha výrobního plánování

Postup při řešení:

- soustavu lin. nerovnic přepíšeme na soustavu lin. rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_1' & & & = & 2000 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & + & x_2' & = & 1600 \end{array}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1' \geq 0,\ x_2' \geq 0$

- řešíme simplexovou případně grafickou metodou

Úloha výrobního plánování

Postup při řešení:

- soustavu lin. nerovnic přepíšeme na soustavu lin. rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_1' & & & = & 2000 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & + & x_2' & = & 1600 \end{array}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1' \geq 0,\ x_2' \geq 0$

- řešíme simplexovou případně grafickou metodou
- optimální řešení je $\vec{x} = (300, 400, 0, 0)'$, což znamená, že z hlediska maximalizace zisku je třeba vyrobit 300 ks výrobků V_1 a 400 ks výrobků V_2, přičemž se spotřebuje veškerá surovina S_1 a S_2 ($x_1' = 0$, $x_2' = 0$). Dosáhne se zisku $z = 300 \cdot 18 + 400 \cdot 8 = 8600$ Kč.

Směšovací úloha

Podnik má vytvořit krmnou směs, která by obsahovala alespoň 308 mg vápníku a 214 mg hořčíku. Používají přitom 2 typů krmiv:

- 1 kg krmiva K_1 obsahuje 10 mg Ca a 8 mg Mg a stojí 1500 Kč

Směšovací úloha

Podnik má vytvořit krmnou směs, která by obsahovala alespoň 308 mg vápníku a 214 mg hořčíku. Používají přitom 2 typů krmiv:

- 1 kg krmiva K_1 obsahuje 10 mg Ca a 8 mg Mg a stojí 1500 Kč
- 1 kg krmiva K_2 obsahuje 8 mg Ca a 1 mg Mg a stojí 240 Kč

Směšovací úloha

Podnik má vytvořit krmnou směs, která by obsahovala alespoň 308 mg vápníku a 214 mg hořčíku. Používají přitom 2 typů krmiv:

- 1 kg krmiva K_1 obsahuje 10 mg Ca a 8 mg Mg a stojí 1500 Kč
- 1 kg krmiva K_2 obsahuje 8 mg Ca a 1 mg Mg a stojí 240 Kč

Úkolem je připravit co možná nejlevnější krmnou směs.

	Krmivo		Požadované množství
	K_1	K_2	
Ca [mg/kg]	10	8	308
Mg [mg/kg]	8	1	214
cena [Kč/kg]	1500	240	min

Směšovací úloha

Matematický model:

proměnné	x_1	...	množství krmiva K_1 ve výsledné směsi
	x_2	...	množství krmiva K_2 ve výsledné směsi

výrobní plán $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Směšovací úloha

Matematický model:

proměnné	x_1	...	množství krmiva K_1 ve výsledné směsi
	x_2	...	množství krmiva K_2 ve výsledné směsi

výrobní plán $\vec{x} = (x_1, x_2)'$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Použijeme-li x_1 kg krmiva K_1 a x_2 krmiva K_2, bude ve výsledné směsi

$$\begin{aligned} Ca: &\quad 10x_1 + 8x_2 \\ Mg: &\quad 8x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Směšovací úloha

Vlastní omezení mají tvar

$$\begin{aligned} 10x_1 + 8x_2 &\geq 308 \\ 8x_1 + x_2 &\geq 214 \end{aligned}$$

Směšovací úloha

Vlastní omezení mají tvar

$$\begin{aligned} 10x_1 + 8x_2 &\geq 308 \\ 8x_1 + x_2 &\geq 214 \end{aligned}$$

Celková cena směsi je dána účelovou funkcí

$$z = 1500x_1 + 240x_2 \longrightarrow \min$$

Jedná se o **minimalizační úlohu**.

Rozdělovací úloha

Máme dostatečné množství základních lan o délce 32 m. K dalšímu použití potřebujeme alespoň 12 kusů 20 m lan, 20 kusů 11 m lan a 26 kusů 6 m lan. Určete optimální skladbu řezných plánů vzhledem k minimálnímu odpadu.

Rozdělovací úloha

Máme dostatečné množství základních lan o délce 32 m. K dalšímu použití potřebujeme alespoň 12 kusů 20 m lan, 20 kusů 11 m lan a 26 kusů 6 m lan. Určete optimální skladbu řezných plánů vzhledem k minimálnímu odpadu.

	Řezný plán					Požadované množství
	I.	II.	III.	IV.	V.	
20 m	1	1	0	0	0	12
11 m	1	0	2	1	0	20
6 m	0	2	1	3	5	26
odpad [m]	1	0	4	3	2	min

Rozdělovací úloha

Proměnné $x_1, \dots, x_5$
Proměnná $x_j,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$ udává počet základních lan rozřezaných podle řezného plánu j, $x_j \geq 0$.

Rozdělovací úloha

Proměnné $x_1, \ldots, x_5$
Proměnná x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ udává počet základních lan rozřezaných podle řezného plánu j, $x_j \geq 0$.

Rozřežeme-li x_1 lan podle řezného plánu I., ..., x_5 lan podle řezného plánu V., nařežeme

$x_1 + x_2$ ks 20 m lan

Rozdělovací úloha

Proměnné $x_1, \ldots, x_5$
Proměnná x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ udává počet základních lan rozřezaných podle řezného plánu j, $x_j \geq 0$.

Rozřežeme-li x_1 lan podle řezného plánu I., $\ldots$, x_5 lan podle řezného plánu V., nařežeme

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 + x_2 & & & & \text{ks 20 m lan} \\
x_1 & + 2x_3 + x_4 & & & \text{ks 11 m lan}
\end{array}
$$

Rozdělovací úloha

Proměnné $x_1, \dots, x_5$
Proměnná x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ udává počet základních lan rozřezaných podle řezného plánu j, $x_j \geq 0$.

Rozřežeme-li x_1 lan podle řezného plánu I., ..., x_5 lan podle řezného plánu V., nařežeme

$$\begin{array}{lllllr}
x_1 + & x_2 & & & & \text{ks 20 m lan} \\
x_1 & & + 2x_3 + & x_4 & & \text{ks 11 m lan} \\
 & 2x_2 + & x_3 + & 3x_4 + & 5x_5 & \text{ks 6 m lan}
\end{array}$$

Rozdělovací úloha

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & & & \geq & 12 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & & & \geq & 20 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & \geq & 26 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$$

Rozdělovací úloha

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & \geq & 12 \\
x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & & & \geq & 20 \\
& & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & \geq & 26
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$$

Celkový odpad určuje účelová funkce

$$z = x_1 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \longrightarrow \min$$