Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 3

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Optimalizace portfolia

Investor se s pomocí makléře rozhoduje mezi následujícími investicemi: akcie A, akcie B, státní pokladniční poukázky, dluhopis A, dluhopis B a depozitní certifikáty. Investor rozhodl, riziko celkového portfolia, definované jako vážený průměr rizikových koeficientů jednotlivých variant (riziko je vyjádřeno koeficientem ve stupnici 1 – 10), by nemělo být větší než 5. Investiční strategie dále očekává, že do dluhopisů bude investováno minimálně 40 % celkové částky a státní pokladniční poukázky by měly být nakoupeny v minimálně dvojnásobném objemu než akcie A a B celkem. Kvůli diverzifikaci by měl být podíl jakékoli varianty v portfoliu maximálně 30 %. Cílem je navrhnout skladbu portfolia tak, aby byl maximalizován celkový výnos.

Optimalizace portfolia

Investice	Očekávaný výnos [%]	Riziko
Akcie A	18,0	10
Akcie B	12,0	7
Pokladniční poukázky	6,5	1
Dluhopis A	8,5	3
Dluhopis B	9,25	5
Depozitní certifikáty	8,0	2

Optimalizace portfolia

Formulace matematického modelu: Proměnné x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$ udávají procentní podíl dané investice v portfoliu.

- celková investovaná částka je rovna 100 %

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

Optimalizace portfolia

Formulace matematického modelu: Proměnné x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$ udávají procentní podíl dané investice v portfoliu.

- celková investovaná částka je rovna 100 %

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

- do dluhopisů by mělo být investováno minimálně 40 %

$$x_4 + x_5 \geq 40$$

Optimalizace portfolia

Formulace matematického modelu: Proměnné x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$ udávají procentní podíl dané investice v portfoliu.

- celková investovaná částka je rovna 100 %

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

- do dluhopisů by mělo být investováno minimálně 40 %

$$x_4 + x_5 \geq 40$$

- pokladniční poukázky mají být koupeny v minimálně dvojnásobném objemu než oba druhy akcií celkem

$$x_3 \geq 2(x_1 + x_2)$$

Optimalizace portfolia

- celková míra rizika by neměla přesáhnou hodnotu 5

$$\frac{10x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 2x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 5$$

Optimalizace portfolia

- celková míra rizika by neměla přesáhnou hodnotu 5

$$\frac{10x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 2x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 5$$

- maximální podíl každé investice je 30 %

$$x_j \leq 30, \; j = 1, 2, \ldots, 6$$

Optimalizace portfolia

- celková míra rizika by neměla přesáhnou hodnotu 5

$$\frac{10x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 2x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 5$$

- maximální podíl každé investice je 30 %

$$x_j \leq 30, \; j = 1, 2, \ldots, 6$$

- podmínky nezápornosti

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, 6$$

Optimalizace portfolia

- celková míra rizika by neměla přesáhnou hodnotu 5

$$\frac{10x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 2x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 5$$

- maximální podíl každé investice je 30 %

$$x_j \leq 30, \;\; j = 1, 2, \ldots, 6$$

- podmínky nezápornosti

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, 6$$

Účelová funkce vyjadřuje maximalizaci výnosu

$$z = 0{,}18x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}085x_4 + 0{,}0925x_5 + 0{,}08x_6 \longrightarrow \max$$

Optimalizace portfolia

Celkový model

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 100 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & & & \geq & 40 \\
2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & & & \leq & 0 \\
5x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & & & - & 3x_6 & \leq & 0
\end{array}
$$

$$x_j \leq 30,\ \ j = 1, 2, \ldots, 6$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, 6$$

$$z = 0{,}18x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}085x_4 + 0{,}0925x_5 + 0{,}08x_6 \longrightarrow \max$$

Optimalizace portfolia

Optimální řešení

$$\vec{x} = (15, 0, 30, 25, 30, 0)', \;\; z = 9{,}55\,\%$$

- akcie A – 15 %
- akcie B nebudou zastoupeny
- státní pokladniční poukázky – 30 %
- dluhopis A – 25 %
- dluhopis B – 30 %
- depozitní certifikáty nebudou zastoupeny
- výnos celého portfolia bude 9,55 %

Obecná úloha lineárního programování

Jde o to nalézt extrém (maximum nebo minimum) lineární účelové funkce při splnění podmínek vyjádřených lineárními nerovnicemi (příp. rovnicemi) a podmínkami nezápornosti.
Lineární nerovnice převedeme pomocí doplňkových proměnných na rovnice.

Rozvrhování reklamy

Reklamní agentura dostala zakázku na zpracování měsíční reklamní kampaně jistého produktu (penzijní připojištění). Celkový objem prostředků uvolněný na tuto kampaň je 10 mil. Kč. Pro reklamu přichází do úvahy 5 médií – televize, rozhlas, časopisy, noviny a billboardy. Na základě pravidelných průzkumů, které má agentura k dispozici, bylo odhadnuto, že 1000 Kč prostředků vynaložených na reklamu v uvedených pěti médiích povede k „oslovení“ 750, 420, 300, 360 resp. 180 osob.

Rozvrhování reklamy

Při plánování reklamy je třeba dodržovat omezení, určená zadavatelem zakázky:

- do televize a rozhlasu dohromady nelze umístit více než 50 % celkového rozpočtu na reklamu,
- do žádného z pěti médií je třeba umístit alespoň 10 % celkového rozpočtu
- do každého z pěti médií nelze umístit více než 30 % celkového rozpočtu
- reklamu je třeba rozvrhnout tak, aby reklamou bylo „osloveno“
    - alespoň 2,5 mil. osob ve věku od 30 do 50 let,
    - alespoň 0,8 mil. osob v příjmové skupině nad 15 000 Kč měsíčně,
    - alespoň 1,5 mil. osob s minimálně středoškolským vzděláním.

Rozvrhování reklamy

Následující tabulka přináší informace týkající se struktury diváků (čtenářů, posluchačů) daných médií z hlediska uvedených hledisek (koeficienty v tabulce udávají vždy počet osob dané kategorie, „zasažených“ reklamou na 1000 Kč vynaložených prostředků):

druh média	TV	rozhlas	časopis	noviny	bilboard
věk 30–50	320	280	140	240	120
příjem nad 15 000	120	90	60	60	50
SŠ vzdělání	350	200	120	140	60

Rozvrhování reklamy

V matematickém modelu budou objemy prostředků vynaložených do jednotlivých médií (v milionech Kč) vyjádřeny pomocí 5 proměnných x_l (televize), x_2 (rozhlas), x_3 (časopis), x_4 (noviny) a x_5 (billboardy). Omezující podmínky modelu budou vyjadřovat výše uvedené požadavky:

- celkový rozpočet reklamy nesmí překročit 10 mil. Kč

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10,$$

Rozvrhování reklamy

V matematickém modelu budou objemy prostředků vynaložených do jednotlivých médií (v milionech Kč) vyjádřeny pomocí 5 proměnných x_l (televize), x_2 (rozhlas), x_3 (časopis), x_4 (noviny) a x_5 (billboardy). Omezující podmínky modelu budou vyjadřovat výše uvedené požadavky:

- celkový rozpočet reklamy nesmí překročit 10 mil. Kč

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10,$$

- do televize a rozhlasu maximálně 50 %, tj. 5 mil. Kč

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

Rozvrhování reklamy

V matematickém modelu budou objemy prostředků vynaložených do jednotlivých médií (v milionech Kč) vyjádřeny pomocí 5 proměnných x_l (televize), x_2 (rozhlas), x_3 (časopis), x_4 (noviny) a x_5 (billboardy). Omezující podmínky modelu budou vyjadřovat výše uvedené požadavky:

- celkový rozpočet reklamy nesmí překročit 10 mil. Kč
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10,$$
- do televize a rozhlasu maximálně 50 %, tj. 5 mil. Kč
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
- dolní mez pro reklamu v každém z médií je 10 % (1 mil. Kč), podobně horní mez je 30 % (3 mil. Kč)
$$1 \leq x_j \leq 3, j = 1, \ldots 5,$$

Rozvrhování reklamy

- podmínky pro věk, příjmovou skupinu a vzdělání

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
320x_1 & + & 280x_2 & + & 140x_3 & + & 240x_4 & + & 120x_5 & \geq & 2500 \\
120x_1 & + & 90x_2 & + & 60x_3 & + & 60x_4 & + & 60x_5 & \geq & 800 \\
350x_1 & + & 200x_2 & + & 120x_3 & + & 140x_4 & + & 140x_5 & \geq & 1500
\end{array}
$$

Účelová funkce vyjadřuje maximalizaci celkového dopadu reklamy

$$z = 750x_1 + 420x_2 + 300x_3 + 360x_4 + 180x_5 \longrightarrow \max$$

Optimalizace portfolia

Optimální řešení

$$\vec{x} = (3, 2, 1, 3, 1)', \;\; z = 4650$$

- televize – 3 mil. Kč
- rozhlas – 2 mil. Kč
- časopisy – 1 mil. Kč
- noviny – 3 mil. Kč
- bilboardy – 1 mil. Kč
- celkový dopad reklamy – 4650 osob

Obecná úloha lineárního programování

Hledáme řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

takové, aby byly splněny podmínky nezápornosti
$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$ a aby účelová funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

nabývala extrému (maxima resp. minima).

Obecná úloha lineárního programování

- předpokládejme, že soustava rovnic má alespoň 1 řešení. V případě $m < n$ má nekonečně mnoho řešení. Smysl mají pouze ta, která splňují podmínky nezápornosti – **přípustná řešení**.

Obecná úloha lineárního programování

- předpokládejme, že soustava rovnic má alespoň 1 řešení. V případě $m < n$ má nekonečně mnoho řešení. Smysl mají pouze ta, která splňují podmínky nezápornosti – **přípustná řešení**.
- přípustné řešení, pro které nabývá účelová funkce maxima (resp. minima) se nazývá **optimální řešení**.

Obecná úloha lineárního programování

- předpokládejme, že soustava rovnic má alespoň 1 řešení. V případě $m < n$ má nekonečně mnoho řešení. Smysl mají pouze ta, která splňují podmínky nezápornosti – **přípustná řešení**.
- přípustné řešení, pro které nabývá účelová funkce maxima (resp. minima) se nazývá **optimální řešení**.
- při hledání optimálního řešení se můžeme omezit jen na **základní řešení**, kterých je konečně mnoho ... $\binom{n}{m}$, a která splňují podmínky nezápornosti – **základní přípustná řešení**

Obecná úloha lineárního programování

ZÁKLADNÍ VĚTA LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Úloha LP má optimální řešení právě tehdy, když má základní optimální řešení.

Příklad

Řešte soustavu nerovnic

$$
\begin{aligned}
7x_1 + 5x_2 &\leq 850 \\
x_1 + x_2 &\leq 150
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Příklad

Řešte soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leq 850 \\ x_1 + x_2 &\leq 150 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Soustava lin. rovnic má tvar

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + x_1' &= 850 \\ x_1 + x_2 + x_2' &= 150 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1' \geq 0,\ x_2' \geq 0$$

Příklad

Základní řešení:

$$
\begin{array}{lll}
\vec{x}_1 & = (0, 0, 850, 150)' & \text{je přípustné} \\
\vec{x}_2 & = (0, 150, 100, 0)' & \text{je přípustné} \\
\vec{x}_3 & = (50, 100, 0, 0)' & \text{je přípustné} \\
\vec{x}_4 & = (150, 0, -200, 0)' & \text{není přípustné} \\
\vec{x}_5 & = (\frac{850}{7}, 0, 0, \frac{200}{7})' & \text{je přípustné} \\
\vec{x}_6 & = (0, 170, 0, -20)' & \text{není přípustné}
\end{array}
$$

Příklad

Přípustná řešení jsou tedy $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}_5$. Budeme-li hledat maximum účelové funkce

$$z = 7x_1 + 6x_2,$$

stačí určit hodnoty této funkce v jednotlivých přípustných řešeních.

Příklad

Přípustná řešení jsou tedy $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}_5$. Budeme-li hledat maximum účelové funkce

$$z = 7x_1 + 6x_2,$$

stačí určit hodnoty této funkce v jednotlivých přípustných řešeních.

$z_1 = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$

Příklad

Přípustná řešení jsou tedy $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}_5$. Budeme-li hledat maximum účelové funkce

$$z = 7x_1 + 6x_2,$$

stačí určit hodnoty této funkce v jednotlivých přípustných řešeních.

$z_1 = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$
$z_2 = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 150 = 900$

Příklad

Přípustná řešení jsou tedy $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}_5$. Budeme-li hledat maximum účelové funkce

$$z = 7x_1 + 6x_2,$$

stačí určit hodnoty této funkce v jednotlivých přípustných řešeních.

$$z_1 = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$$
$$z_2 = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 150 = 900$$
$$z_3 = 7 \cdot 50 + 6 \cdot 100 = 950$$

Příklad

Přípustná řešení jsou tedy $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}_5$. Budeme-li hledat maximum účelové funkce

$$z = 7x_1 + 6x_2,$$

stačí určit hodnoty této funkce v jednotlivých přípustných řešeních.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0 \\
z_2 &= 7 \cdot 0 + 6 \cdot 150 = 900 \\
z_3 &= 7 \cdot 50 + 6 \cdot 100 = 950 \\
z_5 &= 7 \cdot \tfrac{850}{7} + 6 \cdot 0 = 850
\end{aligned}
$$

Příklad

Přípustná řešení jsou tedy $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}_5$. Budeme-li hledat maximum účelové funkce

$$z = 7x_1 + 6x_2,$$

stačí určit hodnoty této funkce v jednotlivých přípustných řešeních.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0 \\
z_2 &= 7 \cdot 0 + 6 \cdot 150 = 900 \\
z_3 &= 7 \cdot 50 + 6 \cdot 100 = 950 \\
z_5 &= 7 \cdot \tfrac{850}{7} + 6 \cdot 0 = 850
\end{aligned}
$$

Optimální řešení je tedy $\vec{x}_3 = (50, 100, 0, 0)'$ s hodnotou účelové funkce $z = 950$.

Příklad

Najdeme nyní maximální hodnotu účelové funkce

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

při platnosti stejných omezení.

Příklad

Najdeme nyní maximální hodnotu účelové funkce

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

při platnosti stejných omezení.

$z_1 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$

Příklad

Najdeme nyní maximální hodnotu účelové funkce

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

při platnosti stejných omezení.

$z_1 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$
$z_2 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 150 = 1050$

Příklad

Najdeme nyní maximální hodnotu účelové funkce

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

při platnosti stejných omezení.

$$z_1 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$$
$$z_2 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 150 = 1050$$
$$z_3 = 2 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 800$$

Příklad

Najdeme nyní maximální hodnotu účelové funkce

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

při platnosti stejných omezení.

$$z_1 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$$
$$z_2 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 150 = 1050$$
$$z_3 = 2 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 800$$
$$z_5 = 2 \cdot \frac{850}{7} + 7 \cdot 0 = \frac{1700}{7}$$

Příklad

Najdeme nyní maximální hodnotu účelové funkce

$$z = 2x_1 + 7x_2$$

při platnosti stejných omezení.

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0 \\
z_2 &= 2 \cdot 0 + 7 \cdot 150 = 1050 \\
z_3 &= 2 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 800 \\
z_5 &= 2 \cdot \frac{850}{7} + 7 \cdot 0 = \frac{1700}{7}
\end{aligned}$$

Optimální řešení je tedy $\vec{x}_2 = (0, 150, 100, 0)'$ s hodnotou účelové funkce $z = 1050$.

Úloha LP a konvexní množiny

Při řešení úlohy lineárního programování hledáme takové řešení, které vyhovuje jak vlastním omezením (ty jsou dány soustavou lin. rovnic a nerovnic), tak i podmínkám nezápornosti. Množina přípustných řešení tvoří konvexní množinu.

Úloha LP a konvexní množiny

Při řešení úlohy lineárního programování hledáme takové řešení, které vyhovuje jak vlastním omezením (ty jsou dány soustavou lin. rovnic a nerovnic), tak i podmínkám nezápornosti. Množina přípustných řešení tvoří konvexní množinu.

Krajní body konvexní množiny odpovídají základním přípustným řešením. Optimální řešení budeme hledat mezi přípustnými základními řešeními.

Úloha LP a konvexní množiny

Věta

Je-li množina všech přípustných řešení konvexní množina, pak funkce

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

nabývá svého extrému v některém z krajních bodů konvexní množiny.

Úloha LP a konvexní množiny

Věta

Jsou-li $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ dvě přípustná řešení úlohy LP, pak i každé

$$\vec{x} = (1-\lambda)\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2, \; \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

je přípustným řešením.

Úloha LP a konvexní množiny

Věta

Jsou-li $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ dvě přípustná řešení úlohy LP, pak i každé

$$\vec{x} = (1-\lambda)\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2, \;\; \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

je přípustným řešením.

Pozn. Jestliže funkce z nabývá extrému ve více krajních bodech (vrcholech) konvexní množiny, pak nabývá téže hodnoty i v libovolném bodě úsečky spojující tyto body.

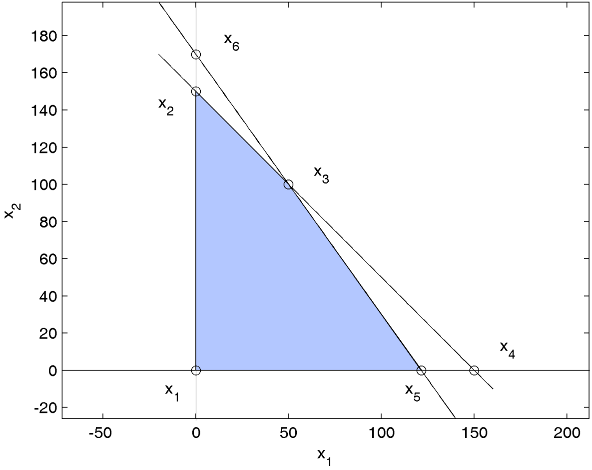
Příklad

Nakreslete množinu přípustných řešení a zakreslete základní řešení dané soustavy.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leq 850 \\ x_1 + x_2 &\leq 150 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Příklad


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-50
0
50
100
150
200
x1
x2
x1
x2
x3
x4
x5
x6

Grafická metoda

- nejedná se o univerzální metodu

Grafická metoda

- nejedná se o univerzální metodu
- lze řešit jen úlohy o 2 proměnných (3 proměnných)

Grafická metoda

Postup

- sestavíme matematický model dané úlohy

Grafická metoda

Postup

- sestavíme matematický model dané úlohy
- přípustná řešení tvoří konvexní množinu v E_2

Grafická metoda

Postup

- sestavíme matematický model dané úlohy
- přípustná řešení tvoří konvexní množinu v E_2
- zakreslíme tuto množinu do souřadnicové soustavy (průnik polorovin)

Grafická metoda

Postup

- sestavíme matematický model dané úlohy
- přípustná řešení tvoří konvexní množinu v E_2
- zakreslíme tuto množinu do souřadnicové soustavy (průnik polorovin)
- optimální řešení nalezneme pomocí grafického vyjádření účelové funkce

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Grafická metoda

Postup

- sestavíme matematický model dané úlohy
- přípustná řešení tvoří konvexní množinu v E_2
- zakreslíme tuto množinu do souřadnicové soustavy (průnik polorovin)
- optimální řešení nalezneme pomocí grafického vyjádření účelové funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

- $c_1x_1 + c_2x_2 = konst$ je rovnicí přímky s normálovým vektorem $\vec{n} = (c_1, c_2)$

Grafická metoda

- grafickým vyjádřením účelové funkce je libovolná přímka kolmá na normálový vektor $\vec{n} = (c_1, c_2)$

Grafická metoda

- grafickým vyjádřením účelové funkce je libovolná přímka kolmá na normálový vektor $\vec{n} = (c_1, c_2)$
- nakreslenou účelovou funkci rovnoběžně posuneme ve směru normálového vektoru $\vec{n}$ tak, aby
  - procházela alespoň jedním bodem množiny přípustných řešení

Grafická metoda

- grafickým vyjádřením účelové funkce je libovolná přímka kolmá na normálový vektor $\vec{n} = (c_1, c_2)$
- nakreslenou účelovou funkci rovnoběžně posuneme ve směru normálového vektoru $\vec{n}$ tak, aby
    - procházela alespoň jedním bodem množiny přípustných řešení
    - její vzdálenost od počátku souřadného systému byl maximální (u maximalizačních úloh), resp. minimální (u minimalizačních úloh)

Příklad

Grafickou metodou řešte úlohu LP

$$\begin{array}{rcrcl} 7x_1 & + & 5x_2 & \leq & 850 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 150 \end{array}$$

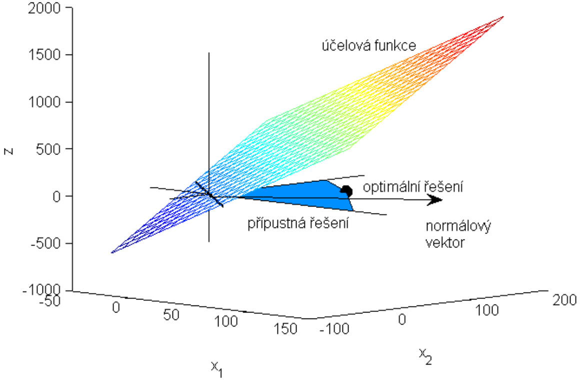
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

pro účelové funkce

a) $z = 7x_1 + 6x_2$,

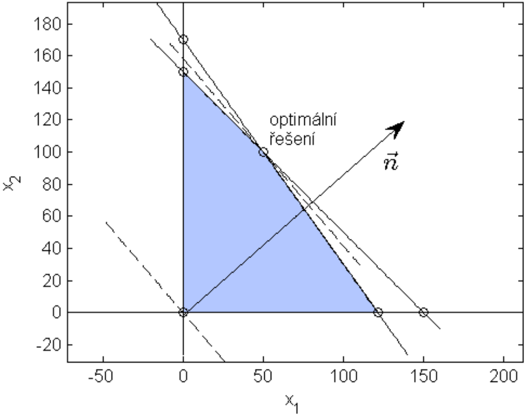
b) $z = 2x_1 + 7x_2$.

Příklad



Obrázek: Řešení pro $z = 7x_1 + 6x_2$

Příklad



Obrázek: Řešení pro $z = 7x_1 + 6x_2$

Počet optimálních řešení

- právě jedno – přímka prochází právě 1 bodem množiny přípustných řešení

Počet optimálních řešení

- právě jedno – přímka prochází právě 1 bodem množiny přípustných řešení
- nekonečně mnoho – přímka prochází nekonečně mnoha body množiny přípustných řešení

Počet optimálních řešení

- právě jedno – přímka prochází právě 1 bodem množiny přípustných řešení
- nekonečně mnoho – přímka prochází nekonečně mnoha body množiny přípustných řešení
- neexistuje žádné optimální řešení