Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 5

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Metoda umělé báze

- Pomocí doplňkových proměnných lze převést na soustavu LR v kanonickém tvaru pouze nerovnice typu „$\leq$“

Metoda umělé báze

- Pomocí doplňkových proměnných lze převést na soustavu LR v kanonickém tvaru pouze nerovnice typu „$\leq$“
- U nerovnice typu „$\geq$“ a u rovnic „$=$“ je třeba použít tzv. **pomocných proměnných** $\longrightarrow$ **metoda umělé báze**

Metoda umělé báze

- Pomocí doplňkových proměnných $x_i' \geq 0$ převedeme SLN na SLR.

Metoda umělé báze

- Pomocí doplňkových proměnných $x_i' \geq 0$ převedeme SLN na SLR.
- Pokud soustava LR není v kanonickém tvaru, pak do rovnic, které neobsahují základní proměnnou přidáme nezápornou **pomocnou proměnnou** $x_i'' \geq 0$.

Metoda umělé báze

- Pomocí doplňkových proměnných $x_i' \geq 0$ převedeme SLN na SLR.
- Pokud soustava LR není v kanonickém tvaru, pak do rovnic, které neobsahují základní proměnnou přidáme nezápornou **pomocnou proměnnou** $x_i'' \geq 0$.
- Úlohu rozšíříme o **pomocnou účelovou funkci**

$$z' = x_1'' + x_2'' + \cdots + x_k'' \longrightarrow \min,$$

kde $k < m$.

Metoda umělé báze

- Pomocí doplňkových proměnných $x_i' \geq 0$ převedeme SLN na SLR.
- Pokud soustava LR není v kanonickém tvaru, pak do rovnic, které neobsahují základní proměnnou přidáme nezápornou **pomocnou proměnnou** $x_i'' \geq 0$.
- Úlohu rozšíříme o **pomocnou účelovou funkci**

$$z' = x_1'' + x_2'' + \cdots + x_k'' \longrightarrow \min,$$

kde $k < m$.

Dostáváme tak rozšířenou úlohu LP (obsahuje navíc pomocné proměnné a pomocnou účelovou funkci).

Metoda umělé báze

Věta

Ke každému řešení rozšířené úlohy odpovídá řešení původní úlohy právě tehdy, když všechny pomocné proměnné jsou rovny 0, tj. $z' = 0$.

Příklad

Řešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ x_2 \leq 10 \\ -2x_1 &+ 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 &+ 4x_2 \geq 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 \longrightarrow \max$$

Příklad

Řešte úlohu LP:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 8 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 \longrightarrow \max$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_1' & & & & & = & 10 \\ - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & & & x_2' & & & = & 9 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & & & & & - & x_3' & = & 8 \\ z - & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & = & 0 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0$$

Příklad

- soustava není v kanonickém tvaru, ve 3. rovnici chybí základní proměnná $\longrightarrow$ přidáme pomocnou proměnou $x_3'' \geq 0$

Příklad

- soustava není v kanonickém tvaru, ve 3. rovnici chybí základní proměnná $\longrightarrow$ přidáme pomocnou proměnou $x_3'' \geq 0$
- úlohu doplníme o pomocnou účelovou funkci

$$z' = x_3'' \longrightarrow \min$$

Příklad

- soustava není v kanonickém tvaru, ve 3. rovnici chybí základní proměnná $\longrightarrow$ přidáme pomocnou proměnou $x_3'' \geq 0$
- úlohu doplníme o pomocnou účelovou funkci

$$z' = x_3'' \longrightarrow \min$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl}
 & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_1' & & & & & = & 10 \\
 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & & x_2' & & & & = & 9 \\
 & & 2x_1 & + & 4x_2 & & & & - & x_3' & + x_3'' & = & 8 \\
z & - & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & = & 0 \longrightarrow \max \\
z' & & & & & & & & & & - x_3'' & = & 0 \longrightarrow \min
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0$$

Příklad

- tato soustava není opět v kanonickém tvaru

Příklad

- tato soustava není opět v kanonickém tvaru
- sečteme proto rovnice obsahující pomocné proměnné s pomocnou účelovou funkcí

Příklad

- tato soustava není opět v kanonickém tvaru
- sečteme proto rovnice obsahující pomocné proměnné s pomocnou účelovou funkcí

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 2x_1 & + \quad x_2 & + x_1' & & & & = & 10 \\
- & 2x_1 & + 3x_2 & + & x_2' & & & = & 9 \\
 & 2x_1 & + 4x_2 & & & - x_3' & + x_3'' & = & 8 \\
z - & 2x_1 & + 3x_2 & & & & & = & 0 \longrightarrow \max \\
z' & 2x_1 & + 4x_2 & & & - x_3' & & = & 8 \longrightarrow \min
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0$$

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	1	1	0	0	0	10	
x_2'	-2	3	0	1	0	0	9	
x_3'	2	4	0	0	-1	1	8	
z	-2	3	0	0	0	0	0	max
z'	2	4	0	0	-1	0	8	min

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	1	1	0	0	0	10	
x_2'	−2	3	0	1	0	0	9	
x_3'	2	4	0	0	−1	1	8	
z	−2	3	0	0	0	0	0	max
z'	2	4	0	0	−1	0	8	min

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	1	1	0	0	0	10	10
x_2'	-2	3	0	1	0	0	9	3
x_3'	2	4	0	0	-1	1	8	2
z	-2	3	0	0	0	0	0	max
z'	2	4	0	0	-1	0	8	min

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	1	1	0	0	0	10	10
x_2'	−2	3	0	1	0	0	9	3
x_3'	2	4	0	0	−1	1	8	2
z	−2	3	0	0	0	0	0	max
z'	2	4	0	0	−1	0	8	min

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	1	1	0	0	0	10	10
x_2'	-2	3	0	1	0	0	9	3
x_3'	2	**4**	0	0	-1	1	8	2
z	-2	3	0	0	0	0	0	max
z'	2	4	0	0	-1	0	8	min

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	1	1	0	0	0	10	10
x_2'	-2	3	0	1	0	0	9	3
x_3'	2	**4**	0	0	-1	1	8	2
z	-2	3	0	0	0	0	0	max
z'	2	4	0	0	-1	0	8	min
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	$-1/4$	8	
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	$-3/4$	3	
x_2	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	$1/4$	2	
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	$-3/4$	-6	max
z'	0	0	0	0	0	-1	0	min

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	
x_2	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	2	
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	
x_2	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	2	
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	**$1/2$**	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	$\mathbf{1/2}$	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max
x_1'	0	-3	1	0	1	2	
x_2'	0	7	0	1	-1	17	
x_1	1	2	0	0	$-1/2$	4	
z	0	7	0	0	-1	8	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	$\mathbf{1/2}$	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max
x_1'	0	-3	1	0	1	2	
x_2'	0	7	0	1	-1	17	
x_1	1	2	0	0	$-1/2$	4	
z	0	7	0	0	-1	8	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	$\mathbf{1/2}$	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max
x_1'	0	-3	1	0	1	2	2
x_2'	0	7	0	1	-1	17	—
x_1	1	2	0	0	$-1/2$	4	—
z	0	7	0	0	-1	8	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	**$1/2$**	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max
x_1'	0	-3	1	0	1	2	2
x_2'	0	7	0	1	-1	17	—
x_1	1	2	0	0	$-1/2$	4	—
z	0	7	0	0	-1	8	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x'_1	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x'_2	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	**$1/2$**	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max
x'_1	0	-3	1	0	**1**	2	2
x'_2	0	7	0	1	-1	17	—
x_1	1	2	0	0	$-1/2$	4	—
z	0	7	0	0	-1	8	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	$3/2$	0	1	0	$1/4$	8	$16/3$
x_2'	$-7/2$	0	0	1	$3/4$	3	—
x_2	$\mathbf{1/2}$	1	0	0	$-1/4$	2	4
z	$-7/2$	0	0	0	$3/4$	-6	max
x_1'	0	-3	1	0	$\mathbf{1}$	2	2
x_2'	0	7	0	1	-1	17	—
x_1	1	2	0	0	$-1/2$	4	—
z	0	7	0	0	-1	8	max
x_3'	0	-3	1	0	1	2	
x_2'	0	4	1	1	0	19	
x_1	1	$1/2$	$1/2$	0	0	5	
z	0	4	1	0	0	10	max

Příklad

Iterační kroky:

$$\vec{x}^0 = (0,0,10,9,0,8)', z^0 = 0 \rightarrow \text{nepřípustné řešení}$$
$$\vec{x}^1 = (0,2,8,3,0)', z^1 = -6 \rightarrow \text{přípustné řešení}$$
$$\vec{x}^2 = (4,0,2,17,0)', z^2 = 8 \rightarrow \text{přípustné řešení}$$
$$\vec{x}^3 = (5,0,0,19,2)', z^2 = 10 \rightarrow \text{optimální řešení}$$

Umělá báze

Rozšířenou úlohu LP řešíme ve 2 fázích

1) minimalizujeme pomocnou účelovou funkci z', mohou nastat 2 situace
   - $\min z' > 0 \Rightarrow$ původní úloha LP nemá přípustné řešení
   - $\min z' = 0 \Rightarrow$ máme výchozí přípustné řešení původní úlohy LP

Umělá báze

Rozšířenou úlohu LP řešíme ve 2 fázích

1) minimalizujeme pomocnou účelovou funkci z', mohou nastat 2 situace
   - $\min z' > 0 \Rightarrow$ původní úloha LP nemá přípustné řešení
   - $\min z' = 0 \Rightarrow$ máme výchozí přípustné řešení původní úlohy LP
2) řešíme původní úlohu vzhledem k původní účelové funkci z

Počet řešení úloh LP

Úloha LP

1. nemá přípustné řešení

Počet řešení úloh LP

Úloha LP

1. nemá přípustné řešení
2. má přípustné řešení

Počet řešení úloh LP

Úloha LP

1. nemá přípustné řešení
2. má přípustné řešení
   2.1 nemá optimální řešení

Počet řešení úloh LP

Úloha LP

1. nemá přípustné řešení
2. má přípustné řešení
   2.1 nemá optimální řešení
   2.2 má optimální řešení

Počet řešení úloh LP

Úloha LP

1. nemá přípustné řešení
2. má přípustné řešení
   2.1 nemá optimální řešení
   2.2 má optimální řešení
      2.2.1 právě jedno optimální řešení

Počet řešení úloh LP

Úloha LP

1. nemá přípustné řešení
2. má přípustné řešení
    2.1 nemá optimální řešení
    2.2 má optimální řešení
        2.2.1 právě jedno optimální řešení
        2.2.2 nekonečně mnoho řešení

1. Úloha LP nemá přípustné řešení

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = x_1 + x_2 \longrightarrow \min$$

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_2''	β_i
x_1	1	1	1	0	0	1
x_2''	0	-2	-1	-1	1	1
z	0	0	1	0	0	1
z'	0	0	-1	-1	0	1

2.1 Úloha LP nemá optimální řešení

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$$

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	β_i
x_1'	0	-1	1	1	3
x_1	1	-2	0	1	2
z	0	-8	0	3	6

2.2.1 Úloha LP má právě 1 optimální řešení

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	β_i
x_2	0	1	1/2	−1/2	1
x_1	1	0	0	1	2
z	0	0	1/2	1/2	3

2.2.2 Úloha LP má nekonečně mnoho optimálních řešení A)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	β_i
x_1	1	0	1	−1	1
x_2	0	1	0	1	2
z	0	0	1	0	3

2.2.2 Úloha LP má nekonečně mnoho optimálních řešení B)

$$\begin{aligned} -x_1 + \ \ x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	β_i
x_2	-1	1	1	0	1
x_2'	-1	0	2	1	4
z	0	0	1	0	1