Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 6

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Dualita v úlohách LP

Uvažujme obecnou úlohu lineárního programování, tj. úlohu nalezení takového řešení vlastních omezujících podmínek

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

aby současně byly splněny podmínky nezápornosti, tj.

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

a aby účelová funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

nabývala svého maxima, resp. minima.

Dualita v úlohách LP

V úloze se vyskytují 3 druhy koeficientů:

- a_{ij} ... strukturální koeficienty
- b_i ... celkové úrovně činitelů (pravé strany)
- c_j ... cenové koeficienty

Tyto koeficienty jsou v matematických modelech propojeny pomocí proměnných x_j. Koeficienty a_{ij}, b_i se vyskytují ve vlastních omezeních, koeficienty c_j se vyskytují v účelové funkci. Takto zformulovaný matematický model budeme nazývat **primární matematický model**.

Dualita v úlohách LP

Ke každé úloze lineárního programování lze formulovat úlohu **duální**. Dualita je matematický vztah mezi dvěma úlohami lineárního programování – primární a duální, které tvoří dvojici duálně sdružených úloh.

Věta o reflexivnosti duality
Duální úloha k duální úloze je původní primární úloha.

Reflexivnost duality umožňuje z vlastností a řešení primární úlohy určit vlastnosti a řešení úlohy duální a naopak.

Dualita v úlohách LP

Říkáme, že maximalizační úloha je ve **standardním tvaru**, jestliže všechny vlastní omezující podmínky jsou typu „$\leq$“ nebo „$=$“, tzn. např.

$$
\begin{array}{rcccccccl}
z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + \dots + & c_nx_n & \rightarrow & \max \\
& a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
& a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
& \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
& a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}
$$

Dualita v úlohách LP

Říkáme, že minimalizační úloha je ve **standardním tvaru**, jestliže všechny vlastní omezující podmínky jsou typu „≥“ nebo „=“, tzn. např.

$$
\begin{array}{rcccccccl}
z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + \dots + & c_nx_n & \rightarrow & \min \\
& a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
& a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
& \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
& a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & \geq & b_m
\end{array}
$$

Poznámka: Pokud typy nerovností nejsou v souladu s extrémem účelové funkce, je třeba příslušné vlastní omezující podmínky násobit číslem (-1), a to i za cenu záporné pravé strany.

Dualita v úlohách LP

Ke každé úloze lineárního programování ve standardním tvaru lze jednoznačně přiřadit duální úlohu následovně:

- Maximalizační primární úloze ve standardním tvaru přísluší minimalizační duální úloha ve standardním tvaru, a naopak.
- Každému vlastnímu omezení primární úlohy odpovídá jedna strukturní proměnná úlohy duální, a naopak.
- Matice strukturních koeficientů primární úlohy a matice strukturních koeficientů duální úlohy jsou navzájem transponované.
- Vektor pravých stran primární úlohy je vektorem cen úlohy duální, a naopak.

Dualita v úlohách LP

Primární mat. model

Účelová funkce $\rightarrow$ max (resp. min)
Vlastní omezení primární úlohy (počet m)
Podmínky nezápornosti primárních proměnných (počet n)

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots n$$

Duální mat. model

Účelová funkce $\rightarrow$ min (resp. max)
Podmínky nezápornosti duálních proměnných (počet m)
Vlastní omezení duální úlohy (počet n)

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \rightarrow \min$$

$$\mathbf{A}^T \vec{u} \geq \vec{c}$$

$$u_i \geq 0, i = 1, \dots m$$

Dualita v úlohách LP

Dualita v lineárním programování je jednoznačné přiřazení matematických modelů vycházejících ze stejných koeficientů a_{ij}, b_i, c_j , které jsou v modelech jinak umístěny.

Jestliže se v primární úloze objevují vlastní omezující podmínky pouze ve tvaru nerovnic (nikoli rovnic) a podmínky nezápornosti na všechny proměnné, tvoří primární úloha spolu s duální úlohou dvojici tzv. **symetrických duálně sdružených úloh**.
Když se mezi vlastními omezujícími podmínkami primární úlohy vyskytuje nějaká rovnice, či pokud se nepožaduje nezápornost některé primární proměnné, nazýváme primární úlohu spolu s duální úlohou dvojicí tzv. **nesymetrických duálně sdružených úloh**.

Schéma konstrukce duální úlohy

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & \color{red}{f} \\
 & & & & & & & & & \shortparallel \\
 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & \color{red}{u_1} & & \color{red}{u_1} & & & & \color{red}{u_1} & & \color{red}{u_1} \\
 & + & & + & & & & + & & + \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & \color{red}{u_2} & & \color{red}{u_2} & & & & \color{red}{u_2} & & \color{red}{u_2} \\
 & + & & + & & & & + & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \\
 & + & & + & & & & + & & + \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & \color{red}{u_m} & & \color{red}{u_m} & & & & \color{red}{u_m} & & \color{red}{u_m} \\
 & \text{IV} & & \text{IV} & & & & \text{IV} & & \downarrow \\
z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & \rightarrow & \quad \max \\
 & & & & & & & & & \color{red}{\min}
\end{array}
$$

Příklad

Podnik vyrábí dva druhy výrobku V_1 a V_2. Tabulka udává spotřebu surovin S_1 a S_2 v kg na výrobu 1 ks výrobku V_1, resp. V_2, a disponibilní množství těchto surovin. Zisk z každého výrobku V_1 je 3 Kč a z 1 ks V_2 je 2 Kč. Stanovte optimální výrobní plán podniku tak, aby dosáhl maximálního zisku. Sestavte matematický model duální úlohy a naleznete řešení duální úlohy.

	Výrobky		Disponibilní množství
	V_1	V_2	
S_1	2	5	1000
S_2	4	1	1100
zisk	3	2	max

Příklad

Nejprve sestavíme (primární) matematický model úlohy.

$$\begin{array}{rcl} & 2x_1 + 5x_2 \leq & 1000 \\ & 4x_1 + \;\; x_2 \leq & 1100 \\ z = & 3x_1 + 2x_2 \rightarrow & \max \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

kde x_1, resp. x_2 značí počet kusu výrobku V_1, resp. V_2.

Primární úloha je maximalizační a všechny vlastní omezující podmínky jsou nerovnosti (konkrétně typu „$\leq$“), tzn. matematický model je ve standardním tvaru. Současně obě proměnné musí být nezáporné, proto tato úloha a k ní úloha duálně sdružená budou tvořit dvojici symetrických úloh.

Příklad

Primární úloha má dvě vlastní omezení, proto duální úloha bude mít dvě duální proměnné. Označíme je u_1 a u_2. Uplatněním výše uvedených pravidel sestavíme matematický model duální úlohy ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2u_1 & + & 4u_2 & \geq & 3 \\ & & 5u_1 & + & u_2 & \geq & 2 \\ f & = & 1000u_1 & + & 1100u_2 & \to & \min \end{array}$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

Vyřešme nejprve simplexovou metodou primární úlohu, poté vyřešíme úlohu duální (metoda umělé báze).

Příklad

báze	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x'_1	2	5	1	0	1000	
x'_2	4	1	0	1	1100	
z	-3	-2	0	0	0	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	
x_2'	4	1	0	1	1100	
z	-3	-2	0	0	0	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	4	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max
x_1'	0	$\frac{18}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	450	
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	275	
z	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	825	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max
x_1'	0	$\frac{18}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	450	
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	275	
z	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	825	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max
x_1'	0	$\frac{18}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	450	100
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	275	1100
z	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	825	max

Příklad

báze	x_1	x_2	x'_1	x'_2	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x'_1	2	5	1	0	1000	500
x'_2	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max
x'_1	0	$\mathbf{\frac{18}{4}}$	1	$-\frac{1}{2}$	450	100
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	275	1100
z	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	825	max

Příklad

PRIMÁRNÍ ÚLOHA

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max
x_1'	0	$\mathbf{\frac{18}{4}}$	1	$-\frac{1}{2}$	450	100
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	275	1100
z	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	825	max
x_2	0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	100	
x_1	1	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	250	
z	0	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{18}$	950	max

Příklad

PRIMÁRNÍ ÚLOHA

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
x_1'	2	5	1	0	1000	500
x_2'	**4**	1	0	1	1100	275
z	-3	-2	0	0	0	max
x_1'	0	$\mathbf{\frac{18}{4}}$	1	$-\frac{1}{2}$	450	100
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	275	1100
z	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	825	max
x_2	0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	100	
x_1	1	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	250	
z	0	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{18}$	950	max

Optimální řešení je $\vec{x} = (250, 100, 0, 0)$, $z_{\max} = 950$.

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	
u_2''	5	1	0	-1	0	1	2	
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	−1	0	1	0	3	
u_2''	5	1	0	−1	0	1	2	
f	−1000	−1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	−1	−1	0	0	5	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u_2''	5	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u_2''	**5**	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u_2''	$\mathbf{5}$	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min
u_1''	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$	
u_1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
f	0	-900	0	-200	0	200	400	min
f'	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u_2''	**5**	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min
u_1''	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$	
u_1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
f	0	-900	0	-200	0	200	400	min
f'	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u'_1	u'_2	u''_1	u''_2	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u''_1	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u''_2	**5**	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min
u''_1	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{18}$
u_1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	2
f	0	-900	0	-200	0	200	400	min
f'	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u_2''	**5**	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min
u_1''	0	$\mathbf{\frac{18}{5}}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{18}$
u_1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	2
f	0	-900	0	-200	0	200	400	min
f'	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	min

Příklad

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	u_1''	u_2''	b_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$
u_1''	2	4	-1	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
u_2''	**5**	1	0	-1	0	1	2	$\frac{2}{5}$
f	-1000	-1100	0	0	0	0	0	min
f'	7	5	-1	-1	0	0	5	min
u_1''	0	$\mathbf{\frac{18}{5}}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{18}$
u_1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	2
f	0	-900	0	-200	0	200	400	min
f'	0	$\frac{18}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	min
u_2	0	1	$-\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$-\frac{2}{18}$	$\frac{11}{18}$	
u_1	1	0	$\frac{1}{18}$	$-\frac{4}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	
f	0	0	-250	-100	250	100	950	min
f'	0	0	0	0	-1	-1	0	min

Optimální řešení je $\vec{u} = \left(\frac{5}{18}, \frac{11}{18}, 0, 0\right)$, $f_{\min} = 950$.

Dualita v úlohách LP

Věta o dualitě
Má-li jedna z dvojice duálně sdružených úloh lineárního programování optimální řešení, pak má i druhá úloha optimální řešení a hodnoty účelových funkcí (pro tato optimální řešení) jsou stejné.

Řešení duální úlohy lze vyvodit i z posledního kroku simplexové tabulky primární úlohy. Podobně, na základě reflexivity duality platí, že optimální řešení primární úlohy lze určit z posledního kroku simplexové tabulky duální úlohy (obsahuje-li optimální řešení duální úlohy).

Dualita v úlohách LP

báze	$x_1 \dots x_n$	$x'_1 \dots x'_m$	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z	$u'_1 \dots u'_n$	$u_1 \dots u_m$	$z = f$

Tabulka: Řešení duální úlohy v řešení primární úlohy

báze	$u_1 \dots u_m$	$u'_1 \dots u'_n$	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f	$x'_1 \dots x'_m$	$x_1 \dots x_n$	$f = y$

Tabulka: Řešení primární úlohy v řešení duální úlohy

Poznámka. Pokud je úloha minimalizační, je třeba koeficienty v anulované účelové rovnici vynásobit číslem (-1) a teprve pak je považovat za duální proměnné.

Příklad

PRIMÁRNÍ ÚLOHA

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b_i
x_2	0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	100
x_1	1	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	250
z	0	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{18}$	950

Optimální řešení je $\vec{x} = (250, 100, 0, 0)$, $z_{\max} = 950$.

DUÁLNÍ ÚLOHA

báze	u_1	u_2	u_1'	u_2'	b_i
u_2	0	1	$-\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{11}{18}$
u_1	1	0	$\frac{1}{18}$	$-\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$
f	0	0	-250	-100	950

Optimální řešení je $\vec{u} = \left(\frac{5}{18}, \frac{11}{18}, 0, 0\right)$, $f_{\min} = 950$.

Dualita v úlohách LP

Uveďme na tomto místě, jaké kombinace optimálních řešení (a jejich vlastností) duálně sdružených úloh jsou přípustné.

- Má-li primární úloha jediné optimální řešení, pak i duální úloha má jediné optimální řešení, a naopak.
- Má-li primární úloha alternativní řešení, pak optimální řešení duální úlohy je degenerované, a naopak.
- Nemá-li primární úloha konečné optimální řešení (tj. má přípustná řešení, ale účelová funkce může neomezeně růst, resp. klesat, podle toho, zda jde o maximalizační, resp. minimalizační, úlohu), pak duální úloha nemá žádné přípustné řešení, a naopak.

Příklad

Podnik vyrábí dva druhy výrobku V_1 a V_2. Tabulka udává spotřebu surovin S_1 a S_2 v kg na výrobu 1 ks výrobku V_1, resp. V_2, i disponibilní množství těchto surovin. Zisk z každého výrobku V_1 je 3 Kč a z 1 ks V_2 je 2 Kč.

	Výrobky		Disponibilní
	V_1	V_2	množství
S_1	2	5	1000
S_2	4	1	1100
zisk	3	2	max

Optimální výrobní plán podniku tak, aby dosáhl maximálního zisku, jsme již stanovili dříve. V tom případě se suroviny transformují na výrobky a ty se (se ziskem) prodávají. Zde ale uvažujme zcela jinak. Úkolem je sestavit úlohu (její matematický model), kdy nebudeme ze surovin vyrábět výrobky a ty prodávat, ale budeme prodávat přímo suroviny, které má podnik k dispozici.

Ekonomická interpretace duální úlohy

Uvažujme tedy přímý prodej surovin. Otázkou, která nás zajímá, je, jaké by musely být ceny surovin (a jakého nejmenšího možného zisku přitom dosáhneme), aby se jejich přímý prodej vyplatil. Označme tedy neznámou cenu jednotkového množství suroviny S_1 symbolem u_1 a neznámou cenu jednotkového množství suroviny S_2 symbolem u_2. Prodejní cena celkového množství surovin je potom dána funkcí

$$f = 1000u_1 + 1100u_2.$$

Aby se přímý prodej surovin vyplatil (proti transformaci surovin na výrobky), je třeba zajistit, aby se přímým prodejem surovin, potřebných pro výrobu 1 ks výrobku V_1, dosáhlo alespoň stejného zisku jako v případě jeho výroby a prodeje, tj. alespoň 3 Kč. Dostáváme podmínku

$$2u_1 + 4u_2 \geq 3.$$

Ekonomická interpretace duální úlohy

Analogickou úvahou vzhledem k surovinám potřebných k výrobě výrobku V_2 dospějeme k podmínce

$$5u_1 + u_2 \geq 2.$$

Ceny surovin uvažujeme nezáporné, tj. $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$.
Dostáváme tedy model

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2u_1 & + & 4u_2 & \geq & 3 \\ & & 5u_1 & + & u_2 & \geq & 2 \\ f & = & 1000u_1 & + & 1100u_2 & \to & \min \end{array}$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

což je již řešená duální úloha LP.