Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 7

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Duálně simplexová metoda

Simplexová metoda

- vychází z řešení, které je primárně přípustné

Duálně simplexová metoda

Simplexová metoda

- vychází z řešení, které je primárně přípustné
- metoda zachovává primární přípustnost

Duálně simplexová metoda

Simplexová metoda

- vychází z řešení, které je primárně přípustné
- metoda zachovává primární přípustnost
- pokračujeme tak dlouho, dokud nenajdeme řešení, které je přípustné i duálně – optimální řešení

Duálně simplexová metoda

Duálně simplexová metoda

- nevyžaduje primární přípustnost (pravé strany mohou být i záporné)

Duálně simplexová metoda

Duálně simplexová metoda

- nevyžaduje primární přípustnost (pravé strany mohou být i záporné)
- vychází z řešení, které je duálně přípustné

Duálně simplexová metoda

Duálně simplexová metoda

- nevyžaduje primární přípustnost (pravé strany mohou být i záporné)
- vychází z řešení, které je duálně přípustné
- metoda zachovává duální přípustnost

Duálně simplexová metoda

Duálně simplexová metoda

- nevyžaduje primární připustnost (pravé strany mohou být i záporné)
- vychází z řešení, které je duálně připustné
- metoda zachovává duální připustnost
- postupnými úpravami simplexové tabulky nenajdeme řešení, které je připustné i primárně – optimální řešení

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* → určíme $\min b_i = b_r$

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\to$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\rightarrow$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální
   - je-li $b_r = 0 \Rightarrow$ máme optimální řešení (degenerované)

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\rightarrow$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální
   - je-li $b_r = 0 \Rightarrow$ máme optimální řešení (degenerované)
   - je-li $b_r < 0 \Rightarrow$ řešení není optimální, r-tý řádek zvolíme za klíčový

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\rightarrow$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální
   - je-li $b_r = 0 \Rightarrow$ máme optimální řešení (degenerované)
   - je-li $b_r < 0 \Rightarrow$ řešení není optimální, r-tý řádek zvolíme za klíčový
2. určíme *klíčový sloupec*

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\rightarrow$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální
   - je-li $b_r = 0 \Rightarrow$ máme optimální řešení (degenerované)
   - je-li $b_r < 0 \Rightarrow$ řešení není optimální, r-tý řádek zvolíme za klíčový
2. určíme *klíčový sloupec*
   - pro záporné koeficienty v klíčovém řádku ($a_{rj} < 0$) určíme podíly $\frac{c_j}{a_{rj}}$

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\rightarrow$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální
   - je-li $b_r = 0 \Rightarrow$ máme optimální řešení (degenerované)
   - je-li $b_r < 0 \Rightarrow$ řešení není optimální, r-tý řádek zvolíme za klíčový
2. určíme *klíčový sloupec*
   - pro záporné koeficienty v klíčovém řádku ($a_{rj} < 0$) určíme podíly $\frac{c_j}{a_{rj}}$
   - najdeme

$$\min_{a_{rj}<0} \left| \frac{c_j}{a_{rj}} \right| \quad \text{klíčový sloupec}$$

Duálně simplexová metoda

Postup DSM – vycházíme z duálně přípustného řešení

1. stanovíme *klíčový řádek* $\rightarrow$ určíme $\min b_i = b_r$
   - je-li $b_r > 0 \Rightarrow$ řešení je primárně přípustné, je tedy optimální
   - je-li $b_r = 0 \Rightarrow$ máme optimální řešení (degenerované)
   - je-li $b_r < 0 \Rightarrow$ řešení není optimální, r-tý řádek zvolíme za klíčový
2. určíme *klíčový sloupec*
   - pro záporné koeficienty v klíčovém řádku ($a_{rj} < 0$) určíme podíly $\frac{c_j}{a_{rj}}$
   - najdeme
   $$\min_{a_{rj}<0} \left| \frac{c_j}{a_{rj}} \right| \quad \text{klíčový sloupec}$$
3. přepočítáme tabulku

Rozdělovací úloha

Máme dostatečné množství základních lan o délce 32 m. K dalšímu použití potřebujeme alespoň 12 kusů 20 m lan, 20 kusů 11 m lan a 26 kusů 6 m lan. Určete optimální skladbu řezných plánů vzhledem k minimálnímu odpadu.

Rozdělovací úloha

Máme dostatečné množství základních lan o délce 32 m. K dalšímu použití potřebujeme alespoň 12 kusů 20 m lan, 20 kusů 11 m lan a 26 kusů 6 m lan. Určete optimální skladbu řezných plánů vzhledem k minimálnímu odpadu.

	Řezný plán					Požadované množství
	I.	II.	III.	IV.	V.	
20 m	1	1	0	0	0	12
11 m	1	0	2	1	0	20
6 m	0	2	1	3	5	26
odpad [m]	1	0	4	3	2	min

Rozdělovací úloha

Proměnné $x_1, \dots, x_5$
Proměnná x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ udává počet základních lan rozřezaných podle řezného plánu j, $x_j \geq 0$.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & \geq & 12 \\
x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & & & \geq & 20 \\
& & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & \geq & 26
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0$$

Celkový odpad určuje účelová funkce

$$z = x_1 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \longrightarrow \min$$

Rozdělovací úloha

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & - & x_1' & & & & & = & 12 \\
x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & - & x_2' & & & = & 20 \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & & & & & - & x_3' & = & 26
\end{array}
$$

Rozdělovací úloha

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & - & x_1' & & & & & = & 12 \\
x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & - & x_2' & & & = & 20 \\
& & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & & & & & - & x_3' & = & 26
\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
-x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_1' & & & & & = & -12 \\
-x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & & & & & + & x_2' & & & = & -20 \\
& - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & 5x_5 & & & & & + & x_3' & = & -26
\end{array}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-12
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_3'	0	-2	-1	-3	-5	0	0	1	-26
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-12
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_3'	0	-2	-1	-3	-5	0	0	1	-26
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-12
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_3'	0	-2	-1	-3	-5	0	0	1	-26
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

$$\min\left\{\left|\frac{0}{-2}\right|, \left|\frac{-4}{-1}\right|, \left|\frac{-3}{-3}\right|, \left|\frac{-2}{-5}\right|\right\}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-12
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_3'	0	-2	-1	-3	-5	0	0	1	-26
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

$$\min\left\{\left|\frac{0}{-2}\right|, \left|\frac{-4}{-1}\right|, \left|\frac{-3}{-3}\right|, \left|\frac{-2}{-5}\right|\right\}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-12
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_3'	0	$\mathbf{-2}$	-1	-3	-5	0	0	1	-26
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

$$\min\left\{\left|\frac{0}{-2}\right|, \left|\frac{-4}{-1}\right|, \left|\frac{-3}{-3}\right|, \left|\frac{-2}{-5}\right|\right\}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	13
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	13
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	13
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

$$\min\left\{\left|\frac{-1}{-1}\right|, \left|\frac{-4}{-2}\right|, \left|\frac{-3}{-1}\right|\right\}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_2'	-1	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	13
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

$$\min \left\{ \left| \frac{-1}{-1} \right|, \left| \frac{-4}{-2} \right|, \left| \frac{-3}{-1} \right| \right\}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_2'	$\mathbf{-1}$	0	-2	-1	0	0	1	0	-20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	13
z	-1	0	-4	-3	-2	0	0	0	0

$$\min\left\{\left|\frac{-1}{-1}\right|, \left|\frac{-4}{-2}\right|, \left|\frac{-3}{-1}\right|\right\}$$

Rozdělovací úloha

báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1'	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	21
x_1	1	0	2	1	0	0	-1	0	20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	13
z	0	0	-2	-2	-2	0	-1	0	20

Optimální řešení je $\vec{x} = (20, 13, 0, 0, 0, 21, 0, 0)$. Hodnota účelové funkce $z = 20$.

Obecný tvar simplexové tabulky

Mějme příklad – výroba dvou směsí kávy *Mocca* a *Standard* (viz úvodní přednáška). Dostaneme simplexovou tabulku

báze	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	b_i
x'_1	$1/2$	$1/4$	1	0	0	40
x'_2	$1/2$	$1/2$	0	1	0	60
x'_3	0	$1/4$	0	0	1	25
z	-20	-14	0	0	0	0

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^T$	$\mathbf{0}^T$	0

A je matice strukturních koeficientů, **I** je jednotková matice, $-\mathbf{c}^T$ jsou koeficienty anulované účelové funkce

Obecný tvar simplexové tabulky

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1	1	0	4	-2	0	40
x_2	0	1	-4	4	0	80
x_3'	0	0	1	-1	1	5
z	0	0	24	16	0	1920

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^T$	$\mathbf{u}_s^T=\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{B}_s^{-1}$ je tzv. *inverzní matice báze*, je na místě, kde byla původně jednotková matice

$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T$ je vektor cenových koeficientů základních proměnných v s-tém kroku výpočtu (původní ceny příslušné bázi v s-tém kroku)

Obecný tvar simplexové tabulky

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix}, \mathbf{c}^T = (20, 14)$$

V druhém kroku ($s = 2$) dostaneme již optimální řešení se základními proměnnými x_1, x_2, x_3'. Odpovídající matice a vektory mají tvar

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_\mathbf{B}^T = (20, 14, 0)$$

Obecný tvar simplexové tabulky

Výpočtem snadno ověříme platnost uvedených vztahů

$$\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obecný tvar simplexové tabulky

Výpočtem snadno ověříme platnost uvedených vztahů

$$\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Obecný tvar simplexové tabulky

Výpočtem snadno ověříme platnost uvedených vztahů

$$\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2^T = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}_2^{-1} = (20, 14, 0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (24, 16, 0)$$

Obecný tvar simplexové tabulky

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T = \mathbf{u}_2^T \mathbf{A} - \mathbf{c}^T = (24, 16, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} - (20, 14) =$$

$$(0, 0)$$

Obecný tvar simplexové tabulky

$$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T = \mathbf{u}_2^T \mathbf{A} - \mathbf{c}^T = (24, 16, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} - (20, 14) = (0, 0)$$

$$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{u}_2^T \mathbf{b} = (24, 16, 0) \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix} = 1920$$

Interpretace optimálního řešení

báze	strukturní proměnné				doplňkové proměnné				b_i
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_1'	x_2'	$\cdots$	x_m'	
základní proměnné	strukturní koeficienty				strukturní koeficienty				hodnoty zákl. prom.
z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	u_1	u_2	$\cdots$	u_m	hodnota z
	redukované ceny				stínové ceny				

Interpretace optimálního řešení

báze	strukturní proměnné				doplňkové proměnné				b_i
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x'_1	x'_2	$\cdots$	x'_m	
základní proměnné	strukturní koeficienty				strukturní koeficienty				hodnoty zákl. prom.
z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	u_1	u_2	$\cdots$	u_m	hodnota z
	redukované ceny				stínové ceny				

Pro hodnotu účelové funkce z platí

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{u}_s^T \mathbf{b},$$

je tedy rovna součinu vektoru stínových cen a vektoru pravých stran. Stínové ceny (hodnoty duálních proměnných) můžeme interpretovat jako ocenění jedné jednotky pravé strany ve vztahu k hodnotě účelové funkce.

Interpretace optimálního řešení

Vraťme se k příkladu s kávou.

báze	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	b_i
x_1	1	0	4	-2	0	40
x_2	0	1	-4	4	0	80
x_3'	0	0	1	-1	1	5
z	0	0	24	16	0	1920

Dostáváme optimální řešení $\mathbf{x} = (40, 80, 0, 0, 5)$ s hodnotou účelové funkce $z = 40 \cdot 20 + 80 \cdot 14 = 1920$. Optimální řešení duální úlohy je $\mathbf{u} = (24, 16, 0, 0, 0)$ s hodnotou účelové funkce $z = 24 \cdot 40 + 16 \cdot 60 + 0 \cdot 25 = 1920$. To znamená, že 1 tuna 1. komponenty se podílí na celkovém zisku hodnotou 24 tis. Kč, 1 tuna 2. komponenty se podílí na celkovém zisku hodnotou 16 tis. Kč a 3. komponenta se na zisku nepodílí (je jí k dispozici tolik, že nemá na výrobu v podstatě žádný vliv)

Analýza citlivosti pravých stran

Otázka: Jak se může měnit vybraná složka vektoru pravých stran tak, aby optimální řešení, určené stávajícími základními proměnnými zůstalo přípustné?

V s-tém kroku dostáváme vektor pravých stran ve tvaru $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$.

Aby řešení zůstalo přípustné, musí platit $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.

Uvažujme, že chceme spočítat *interval stability* pro první složku vektoru $\mathbf{b}$. Stačí řešit soustavu nerovnic

$$\mathbf{B}_s^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \geq 0.$$

Analýza citlivosti pravých stran

Mějme

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix},$$

pro první složku je třeba řešit soustavu

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 + \Delta b_1 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} 4\Delta b_1 + 40 &\geq 0 \\ -4\Delta b_1 + 80 &\geq 0 \\ \Delta b_1 + 5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Analýza citlivosti pravých stran

Řešením této soustavy dostaneme řešení

$$\Delta b_1 = \langle -5, 20 \rangle.$$

Iterval stability pro první složku vektoru **b** je

$$b_1 \in \langle 35, 60 \rangle.$$

Podobně pro další složky b_2 a b_3 dostáváme

$$\begin{array}{ll} \Delta b_2 \in \langle -20, 5 \rangle & \text{tzn. } b_2 \in \langle 40, 65 \rangle, \\ \Delta b_3 \in \langle -5, \infty) & \text{tzn. } b_3 \in \langle 20, \infty) \end{array}$$

Analýza citlivosti cenových koeficientů

Otázka: Jak se může měnit vybraná složka vektoru cenových koeficientů tak, aby stávající řešení zůstalo optimální?
V případě maximalizační úlohy musí platit

$$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geq 0,$$

pro jednotlivé hodnoty

$$z_j = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

a zároveň

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B} \mathbf{B}_s^{-1} \geq 0.$$

Analýza citlivosti cenových koeficientů

Mějme $\mathbf{c}^T = (20, 14)$, základní proměnné jsou x_1, x_2, x_3', $\mathbf{c}_\mathbf{B}^T = (20, 14, 0)$. Pro interval stability první složky vektoru $\mathbf{c}$ budeme řešit pro redukované ceny

$$(20 + \Delta c_1, 14, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (20 + \Delta c_1, 14) \geq \mathbf{0}$$

a pro stínové ceny

$$(20 + \Delta c_1, 14, 0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Analýza citlivosti cenových koeficientů

Dostaneme řešení

$$\begin{aligned} \Delta c_1 &\in \langle -6, 8\rangle \qquad \text{tzn. } c_1 \in \langle 14, 28\rangle, \\ \Delta c_2 &\in \langle -4, 6\rangle \qquad \text{tzn. } c_2 \in \langle 10, 20\rangle. \end{aligned}$$