Základy operačního výzkumu

Přednáška č. 9

Jiří Neubauer

Katedra ekonometrie FEM UO Brno

Distribuční úlohy

Budeme se zabývat 2 typy distribučních úloh

- dopravní úloha
- přiřazovací problém

Dopravní úloha

V **dopravním problému** se v typickém případě jedná o rozvržení rozvozu nějakého zboží či materiálu z dodavatelských míst k odběratelům tak, aby byly minimalizovány celkové náklady související s tímto rozvozem.

Dopravní úloha - příklad

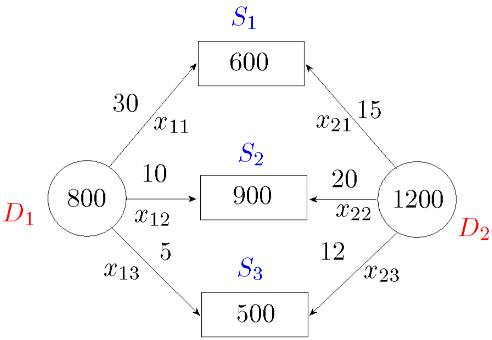
Od dvou dodavatelů D_1 a D_2 je třeba přemístit zboží ke 3 spotřebitelům S_1, S_2 a S_3.

Kapacity dodavatelů jsou D_1: 800 ks D_2: 1200 ks

Požadavky spotřebitelů jsou S_1: 600 ks S_2: 900 ks S_3: 500 ks

Náklady na přepravu 1 kusu zboží mezi jednotlivými dodavateli a spotřebiteli udávají tzv. **přepravní sazby** c_{ij} (Jedná se o náklady na přepravu 1 ks zboží od dodavatele D_i, ke spotřebiteli S_j.)
V našem případě $c_{11} = 30$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 5$, $c_{21} = 15$, $c_{22} = 20$ a $c_{23} = 12$.

Dopravní úloha - příklad



Úkolem je sestavit optimální plán přepravy, tj. rozhodnout, po kterých cestách a v jakém množství se má zboží přepravovat, aby celkové přepravní náklady byly minimální.

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} . . . počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} ...počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$D_1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 800$$

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} ... počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$\begin{aligned} D_1: x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 800 \\ D_2: x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1200 \end{aligned}$$

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} . . . počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$
\begin{array}{lcccccccc}
D_1 : & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & = & 800 \\
D_2 : & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 1200 \\
S_1 : & x_{11} & + & x_{21} & & & = & 600
\end{array}
$$

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} ... počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$
\begin{aligned}
D_1 &: x_{11} + x_{12} + x_{13} = 800 \\
D_2 &: x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1200 \\
S_1 &: x_{11} + x_{21} = 600 \\
S_2 &: x_{12} + x_{22} = 900
\end{aligned}
$$

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} ... počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$
\begin{array}{lcl}
D_1: x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 800 \\
D_2: x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 1200 \\
S_1: x_{11} + x_{21} & = & 600 \\
S_2: x_{12} + x_{22} & = & 900 \\
S_3: x_{13} + x_{23} & = & 500
\end{array}
$$

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} ... počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
D_1: & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & = & 800 \\
D_2: & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 1200 \\
S_1: & x_{11} & + & x_{21} & & & = & 600 \\
S_2: & x_{12} & + & x_{22} & & & = & 900 \\
S_3: & x_{13} & + & x_{23} & & & = & 500
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$$

Dopravní úloha - příklad

- proměnné: x_{ij} ... počet výrobků přepravených od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j
- omezení: jsou dána požadavky spotřebitelů a kapacitami dodavatelů

$$\begin{array}{llllllll} D_1: & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & = & 800 \\ D_2: & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 1200 \\ S_1: & x_{11} & + & x_{21} & & & = & 600 \\ S_2: & x_{12} & + & x_{22} & & & = & 900 \\ S_3: & x_{13} & + & x_{23} & & & = & 500 \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$$

účelová funkce

$$z = 30x_{11} + 10x_{12} + 5x_{13} + 15_{21} + 20x_{22} + 12x_{23} \quad \rightarrow \quad \min$$

Dopravní úloha – obecný model

Uvažujme m dodavatelů $D_1, D_2 \ldots, D_m$ s kapacitami $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jednotek zboží. Toto zboží se má přepravit k n spotřebitelům $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jejichž požadavky jsou $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Náklady na přepravu jednotky zboží od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j označme c_{ij} $(i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n)$.

Dopravní úloha – obecný model

Uvažujme m dodavatelů $D_1, D_2 \ldots, D_m$ s kapacitami $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jednotek zboží. Toto zboží se má přepravit k n spotřebitelům $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jejichž požadavky jsou $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Náklady na přepravu jednotky zboží od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j označme c_{ij} $(i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n)$. Předpokládejme dále, že úloha je **vyrovnaná**, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Dopravní úloha – obecný model

Uvažujme m dodavatelů $D_1, D_2 \dots, D_m$ s kapacitami $a_1, a_2, \dots, a_m$ jednotek zboží. Toto zboží se má přepravit k n spotřebitelům $S_1, S_2, \dots, S_n$, jejichž požadavky jsou $b_1, b_2, \dots, b_n$.
Náklady na přepravu jednotky zboží od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j označme c_{ij} $(i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n)$. Předpokládejme dále, že úloha je **vyrovnaná**, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$$\left.\begin{array}{lllll} D_i: & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & a_i & i = 1, 2, \dots, m \\ S_j: & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & b_j & j = 1, 2, \dots, n \end{array}\right\} m + n \text{ vlastních omezení}$$

Dopravní úloha – obecný model

Uvažujme m dodavatelů $D_1, D_2 \ldots, D_m$ s kapacitami $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jednotek zboží. Toto zboží se má přepravit k n spotřebitelům $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jejichž požadavky jsou $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Náklady na přepravu jednotky zboží od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j označme c_{ij} $(i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n)$. Předpokládejme dále, že úloha je **vyrovnaná**, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$$\left.\begin{array}{llll} D_i : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & a_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ S_j : \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & b_j & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} m + n \text{ vlastních omezení}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \left.\begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}\right\} m \cdot n \text{ podmínek nezápornosti}$$

Dopravní úloha – obecný model

Uvažujme m dodavatelů $D_1, D_2 \ldots, D_m$ s kapacitami $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jednotek zboží. Toto zboží se má přepravit k n spotřebitelům $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jejichž požadavky jsou $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Náklady na přepravu jednotky zboží od dodavatele D_i ke spotřebiteli S_j označme c_{ij} $(i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n)$. Předpokládejme dále, že úloha je **vyrovnaná**, tedy platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$$\left.\begin{array}{rcll} D_i : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & a_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ S_j : \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & b_j & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} m + n \text{ vlastních omezení}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \left.\begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}\right\} m \cdot n \text{ podmínek nezápornosti}$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \rightarrow \quad \min \quad \text{(celková cena přepravy)}$$

Dopravní úloha

Výchozí údaje i vlastní omezení se zapisují do tabulky.

	S_1	S_2	$\cdots$	S_n	Kapacity a_i
D_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	$\cdots$	x_{1n} c_{1n}	a_1
D_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	$\cdots$	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	$\cdots$	x_{mn} c_{mn}	a_m
Požadavky b_j	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	celkem

Dopravní úloha

- Je-li úloha vyrovnaná ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), pak je jedno z $m + n$ vlastních omezení lineárně závislé na ostatních. Základní řešení může mít tedy maximálně $m + n - 1$ kladných proměnných (tj. obsazených polí). **Nedegenerované řešení** obsahuje právě $m + n - 1$ kladných x_{ij}.

Dopravní úloha

- Je-li úloha vyrovnaná ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), pak je jedno z $m+n$ vlastních omezení lineárně závislé na ostatních. Základní řešení může mít tedy maximálně $m+n-1$ kladných proměnných (tj. obsazených polí). **Nedegenerované řešení** obsahuje právě $m+n-1$ kladných x_{ij}.
- Spojí-li se obsazená pole u základního řešení vodorovnými a svislými čarami, **nesmí** vytvořit uzavřený obvod.

Vogelova aproximační metoda

Vogelova aproximační metoda (VAM) slouží k nalezení výchozího řešení dopravního problému.

Vogelova aproximační metoda

Vogelova aproximační metoda (VAM) slouží k nalezení výchozího řešení dopravního problému.

- Určí políčko $D_i S_j$, které obsadíme maximálním množstvím x_{ij} přepravovaného množství zboží s ohledem na kapacitu a_i a požadavek b_j s přihlédnutím na již obsazená políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Vogelova aproximační metoda

Vogelova aproximační metoda (VAM) slouží k nalezení výchozího řešení dopravního problému.

- Určí políčko D_iS_j, které obsadíme maximálním množstvím x_{ij} přepravovaného množství zboží s ohledem na kapacitu a_i a požadavek b_j s přihlédnutím na již obsazená políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci.
- Vyčerpáme-li kapacitu některého dodavatele, proškrtneme daný řádek.

Vogelova aproximační metoda

Vogelova aproximační metoda (VAM) slouží k nalezení výchozího řešení dopravního problému.

- Určí políčko D_iS_j, které obsadíme maximálním množstvím x_{ij} přepravovaného množství zboží s ohledem na kapacitu a_i a požadavek b_j s přihlédnutím na již obsazená políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci.
- Vyčerpáme-li kapacitu některého dodavatele, proškrtneme daný řádek.
- Vyčerpáme-li požadavky některého spotřebitele, proškrtneme daný sloupec.

Vogelova aproximační metoda

Postup VAM

1. V každém řádku resp. sloupci určíme 2 nejnižší přepravní sazby a vypočteme jejich rozdíl (diferenci) a zapíšeme do odpovídajícího řádku resp. sloupce.

Vogelova aproximační metoda

Postup VAM

1. V každém řádku resp. sloupci určíme 2 nejnižší přepravní sazby a vypočteme jejich rozdíl (diferenci) a zapíšeme do odpovídajícího řádku resp. sloupce.
2. Najdeme řádek či sloupec s největší diferencí a v tomto řádku či sloupci obsadíme políčko s minimální sazbou.

Vogelova aproximační metoda

Postup VAM

1. V každém řádku resp. sloupci určíme 2 nejnižší přepravní sazby a vypočteme jejich rozdíl (diferenci) a zapíšeme do odpovídajícího řádku resp. sloupce.
2. Najdeme řádek či sloupec s největší diferencí a v tomto řádku či sloupci obsadíme políčko s minimální sazbou.
3. Vyčerpáme-li kapacitu dodavatele, proškrtneme řádek, uspokojíme-li požadavky spotřebitele, proškrtneme sloupec.

Vogelova aproximační metoda

Postup VAM

1. V každém řádku resp. sloupci určíme 2 nejnižší přepravní sazby a vypočteme jejich rozdíl (diferenci) a zapíšeme do odpovídajícího řádku resp. sloupce.
2. Najdeme řádek či sloupec s největší diferencí a v tomto řádku či sloupci obsadíme políčko s minimální sazbou.
3. Vyčerpáme-li kapacitu dodavatele, proškrtneme řádek, uspokojíme-li požadavky spotřebitele, proškrtneme sloupec.
4. Pokračujeme bodem 2, neuvažujeme proškrtnutá ani obsazená pole.

Test optima

K tabulce přidáme sloupec **řádkových čísel** u_i $(i = 1, \ldots, m)$ a řádek **sloupcových čísel** v_j $(j = 1, \ldots, n)$. Předpokládejme, že máme obsazeno $m + n - 1$ políček (nedegerované řešení). Pro **obsazená** pole platí

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Protože čísel u_i a v_j je $m + n$, ale obsazených polí je $m + n - 1$, je třeba jedno z čísel u_i a v_j zvolit (obvykle se volí $u_1 = 0$) a ostatní dopočítat podle uvedeného vztahu.

Test optima

K tabulce přidáme sloupec **řádkových čísel** u_i $(i = 1, \dots, m)$ a řádek **sloupcových čísel** v_j $(j = 1, \dots, n)$. Předpokládejme, že máme obsazeno $m + n - 1$ políček (nedegerované řešení). Pro **obsazená** pole platí

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Protože čísel u_i a v_j je $m + n$, ale obsazených polí je $m + n - 1$, je třeba jedno z čísel u_i a v_j zvolit (obvykle se volí $u_1 = 0$) a ostatní dopočítat podle uvedeného vztahu.
U **proškrtnutých** polí pomocí známých čísel u_i a v_j určíme **nepřímé sazby** c'_{ij} podle vztahu

$$u_i + v_j = c'_{ij}.$$

(Tyto sazby napíšeme do dolního levého rohu proškrtnutých políček.)

Test optima

1. Je-li u všech proškrtnutých polí $c'_{ij} \leq c_{ij}$, pak je dané řešení **optimální**.

Test optima

1. Je-li u všech proškrtnutých polí $c'_{ij} \leq c_{ij}$, pak je dané řešení **optimální**.
2. Existuje-li pole, kde $c'_{ij} > c_{ij}$, pak dané **není optimální** a lze jej zlepšit.

Test optima

1. Je-li u všech proškrtnutých polí $c'_{ij} \leq c_{ij}$, pak je dané řešení **optimální**.
2. Existuje-li pole, kde $c'_{ij} > c_{ij}$, pak dané **není optimální** a lze jej zlepšit.

Pozn. Máme-li optimální řešení a pro některé políčko platí $c'_{ij} = c_{ij}$, pak existuje jiné optimální – **alternativní** – řešení.

Zlepšování řešení

Pokud pro některé neobsazené pole platí $c'_{ij} > c_{ij}$, pak řešení není optimální a lze najít lepší řešení.

Zlepšování řešení

Pokud pro některé neobsazené pole platí $c'_{ij} > c_{ij}$, pak řešení není optimální a lze najít lepší řešení.

1. Najdeme políčko, kde $c'_{ij} > c_{ij}$. Pokud takových políček více, zvolíme to, kde je rozdíl $c'_{ij} - c_{ij}$ největší (volba vstupující proměnné).

Zlepšování řešení

Pokud pro některé neobsazené pole platí $c'_{ij} > c_{ij}$, pak řešení není optimální a lze najít lepší řešení.

1. Najdeme políčko, kde $c'_{ij} > c_{ij}$. Pokud takových políček více, zvolíme to, kde je rozdíl $c'_{ij} - c_{ij}$ největší (volba vstupující proměnné).
2. Vytvoříme tzv. **uzavřený okruh** (mnohoúhelník se sudým počtem vrcholů, vrcholy mohou být jen obsazená pole a vybrané neobsazené pole, jednotlivé hrany – svislá a vodorovná – se střídají).

Zlepšování řešení

Pokud pro některé neobsazené pole platí $c'_{ij} > c_{ij}$, pak řešení není optimální a lze najít lepší řešení.

1. Najdeme políčko, kde $c'_{ij} > c_{ij}$. Pokud takových políček více, zvolíme to, kde je rozdíl $c'_{ij} - c_{ij}$ největší (volba vstupující proměnné).
2. Vytvoříme tzv. **uzavřený okruh** (mnohoúhelník se sudým počtem vrcholů, vrcholy mohou být jen obsazená pole a vybrané neobsazené pole, jednotlivé hrany – svislá a vodorovná – se střídají).
3. Neobsazené pole v okruhu označíme znaménkem $\oplus$, v dalších polích potom střídáme znaménka $\ominus, \oplus, \cdots \ominus$.

Zlepšování řešení

Pokud pro některé neobsazené pole platí $c'_{ij} > c_{ij}$, pak řešení není optimální a lze najít lepší řešení.

1. Najdeme políčko, kde $c'_{ij} > c_{ij}$. Pokud takových políček více, zvolíme to, kde je rozdíl $c'_{ij} - c_{ij}$ největší (volba vstupující proměnné).
2. Vytvoříme tzv. **uzavřený okruh** (mnohoúhelník se sudým počtem vrcholů, vrcholy mohou být jen obsazená pole a vybrané neobsazené pole, jednotlivé hrany – svislá a vodorovná – se střídají).
3. Neobsazené pole v okruhu označíme znaménkem $\oplus$, v dalších polích potom střídáme znaménka $\ominus, \oplus, \cdots \ominus$.
4. Najedeme nejmenší hodnotu u $\ominus$ polí (volba vystupující proměnné).

Zlepšování řešení

Pokud pro některé neobsazené pole platí $c'_{ij} > c_{ij}$, pak řešení není optimální a lze najít lepší řešení.

1. Najdeme políčko, kde $c'_{ij} > c_{ij}$. Pokud takových políček více, zvolíme to, kde je rozdíl $c'_{ij} - c_{ij}$ největší (volba vstupující proměnné).
2. Vytvoříme tzv. **uzavřený okruh** (mnohoúhelník se sudým počtem vrcholů, vrcholy mohou být jen obsazená pole a vybrané neobsazené pole, jednotlivé hrany – svislá a vodorovná – se střídají).
3. Neobsazené pole v okruhu označíme znaménkem $\oplus$, v dalších polích potom střídáme znaménka $\ominus, \oplus, \cdots \ominus$.
4. Najedeme nejmenší hodnotu u $\ominus$ polí (volba vystupující proměnné).
5. Tuto hodnotu přičteme k $\oplus$ polím a odečteme od polí označených znaménkem $\ominus$. Ostatní políčka opíšeme.